

# CONCOURS BLANC

*Ce devoir comporte 2 parties totalement indépendantes, à traiter sur des copies séparées.*

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### I. Planètes extra-solaires et exo-biologie

Depuis l'observation, en 1995, par M. Mayor et ses collaborateurs, de la première planète extra-solaire, c'est-à-dire d'une planète située en dehors de notre système solaire et orbitant autour d'une autre étoile que le Soleil, plus d'un millier d'autres planètes extra-solaires ont été découvertes. Ce domaine d'astrophysique est devenu très actif et est notamment motivé par la possibilité de plus en plus réaliste d'observer un jour des planètes ressemblant à la Terre et susceptibles d'héberger une forme de vie. Ce problème présente quelques méthodes utilisées pour la recherche de tels systèmes.

**Données :**

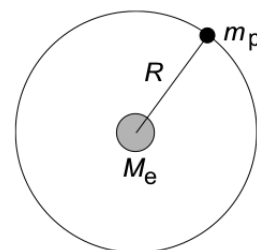
- Constante de Planck :  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Constante gravitationnelle :  $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Constante universelle des gaz parfaits :  $\mathcal{R} = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Distance Terre-Soleil :  $R_{TS} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
- Distance Mars-Soleil :  $R_{MS} = 2,3 \times 10^{11} \text{ m}$
- Distance Jupiter-Soleil :  $R_{JS} = 7,8 \times 10^{11} \text{ m}$
- Masse du Soleil :  $M_\star = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ; de la Terre :  $m_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$ ; de Jupiter :  $m_J = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$
- Rayon de la Terre :  $r_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ ; de Jupiter :  $r_J = 6,9 \times 10^7 \text{ m}$ ; du Soleil :  $r_\star = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$
- Température (de surface) de la Terre :  $T_T = 300 \text{ K}$ ; du Soleil :  $T_\star = 5700 \text{ K}$
- Masse molaire du dioxygène :  $\mu_{O_2} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

#### I.1. Détection d'une planète extra-solaire.

##### I.1.a. Troisième loi de Kepler.

Une planète de masse  $m_p$  tourne autour d'une étoile de masse  $M_e$  selon une orbite circulaire (figure ci-contre). Dans la mesure où  $m_p \ll M_e$ , on considère dans un premier temps que l'étoile demeure immobile dans le référentiel d'étude, noté  $\mathcal{R}$  et supposé galiléen. On souhaite établir la loi troisième de Kepler, qui lie la période de révolution  $T$  de la planète autour de l'étoile à la distance  $R$  qui les sépare.

Pour décrire ce mouvement plan, circulaire, on adoptera un repère polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  dont l'origine coïncide avec le centre de l'étoile.



1. Donner l'expression de la force  $\vec{F}_{e/p}$  qui s'applique sur la planète, de la part de l'étoile.
2. Montrer que l'accélération de la planète est radiale et la calculer. On notera  $\omega$  est la vitesse angulaire de rotation de cette planète autour de l'étoile.
3. Établir enfin la troisième loi de Kepler.
4. Calculer la valeur de la période de révolution de la Terre, de Mars puis de Jupiter, autour du Soleil.

### 1.1.b. Détection par la méthode des transits.

Du fait de la très grande différence de brillance entre une étoile et chacune de ses planètes, il est très difficile de détecter leur présence par leur observation directe. La plupart des méthodes de détection de planètes extra-solaires employées jusqu'aujourd'hui sont des méthodes indirectes où c'est la lumière provenant de l'étoile qui est détectée. L'une d'elles est la méthode des transits qu'illustre la figure ci-dessous. Le flux d'énergie lumineuse  $\Phi$  (unité : W), provenant de l'étoile de rayon  $r_e$  et détecté par le télescope d'observation, est en première approximation proportionnel à la surface visible. Il diminue donc lorsque la planète de rayon  $r_p$  transite devant l'étoile en l'éclipsant partiellement, au pro-rata de la surface occultée.

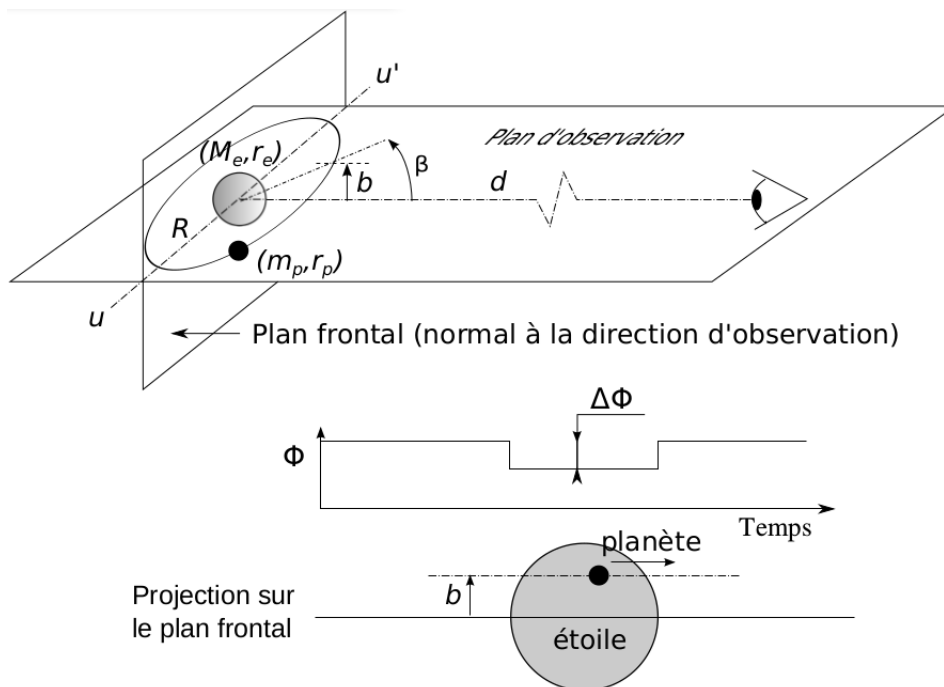


Illustration du transit d'une planète devant une étoile. La droite  $(u, u')$  représente l'intersection du plan de l'orbite avec le plan d'observation.

Le plan de l'orbite de la planète et le plan d'observation forment un angle  $\beta$  (figure ci-dessus). Un transit a ainsi une durée qui dépend du paramètre  $b$  représentant l'élévation de la trajectoire de la planète par rapport au plan d'observation, à son apogée.

5. En négligeant l'effet de bord où la planète n'est que partiellement superposée au disque stellaire, montrer que la durée  $\tau_e$  de l'éclipse la plus longue (pour  $b = 0$ ) s'écrit :

$$\tau_e \approx 2r_e \sqrt{\frac{R}{GM_e}}$$

6. On se place maintenant dans le cas où  $b \neq 0$ . On suppose pour simplifier que comme indiqué sur la figure ci-dessus, la direction de l'intersection  $(u, u')$  des plans d'observation et de trajectoire est orthogonale à la direction d'observation.

- a) En négligeant toujours l'effet de bord, établir que la durée d'un transit s'exprime :

$$\tau(b) = \tau_e \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r_e}\right)^2}.$$

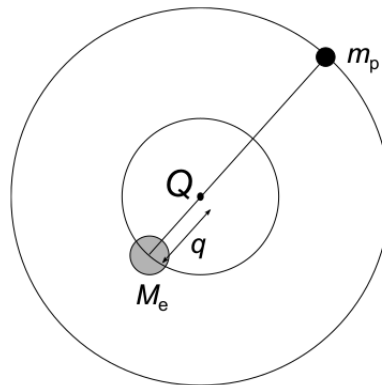
- b) Représenter graphiquement le rapport  $\tau/\tau_e$ , en fonction de  $b/r_e$ . Montrer que plus de la moitié des trajectoires produisant une éclipse dans ces conditions ont une durée d'éclipse supérieure à 80% de la durée  $\tau_e$ .

7. Toujours pour l'éclipse la plus longue, exprimer la durée  $\tau_p$  de la phase transitoire que nous avons négligée dans les questions précédentes.

8. Préciser à quelle condition  $\tau_p$  reste dominée par  $\tau_e$ .
9. Exprimer la variation relative de flux d'énergie lumineuse  $\Delta\Phi/\Phi$ , en fonction de  $r_e$  et  $r_p$ .
10. Calculer les valeurs de  $\tau_e$ ,  $\tau_p$  et  $\Delta\Phi/\Phi$ , pour un transit de la Terre, puis de Jupiter, devant le Soleil, observé depuis un autre système stellaire.

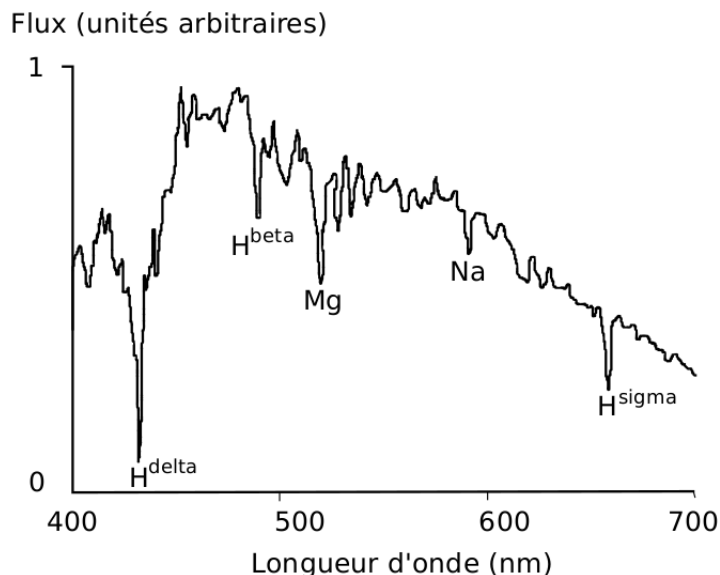
### 1.1.c. Détection par décalage Doppler.

Bien que  $m_p \ll M_e$ , l'étoile n'est toutefois pas strictement immobile. Une seconde méthode indirecte de détection de la présence de planète gravitant autour d'une étoile consiste alors à observer le mouvement de l'étoile autour du centre de gravité  $Q$  du système étoile-planète. Ce système est illustré par la figure ci-contre. On admet que le mouvement de chacun des astres est circulaire uniforme, de même vitesse angulaire.



Trajectoires de l'étoile et de la planète autour de leur centre de gravité  $Q$ .

11. Déterminer le rayon  $q$  de l'orbite de l'étoile autour du centre de gravité  $Q$ , en fonction de  $M_e$ ,  $m_p$  et de la distance  $R$  étoile-planète.
12. En supposant que la relation établie à la question 3. demeure applicable, déterminer la vitesse tangentielle  $v$  de l'étoile, en fonction des masses de l'étoile et de la planète, de la distance  $R$  qui les sépare et de la constante gravitationnelle.
13. La composante  $v_a$  de la vitesse de l'étoile selon l'axe d'observation se déduit du décalage Doppler subi par les radiations provenant de l'étoile. Leur spectre présente alors l'aspect de celui illustré figure ci-dessous. Il y apparaît des raies d'absorption, bien identifiables, dues aux éléments formant la couche externe de l'étoile. Ces raies sont ensuite comparées à des raies étalons les plus proches.



Spectre d'émission de l'étoile.

- a) Pour une raie, située à la longueur d'onde  $\lambda_0$  si l'étoile était immobile (source étalon du laboratoire), et à  $\lambda_a$  lorsqu'elle a une vitesse axiale apparente  $v_a$ , établir l'expression du décalage Doppler  $\Delta\lambda = \lambda_a - \lambda_0$  (non relativiste), à savoir

$$\Delta\lambda = \frac{v_a}{c} \lambda_0.$$

Nous convenons que la vitesse  $v_a$  est comptée positivement dans le sens observateur vers étoile.

- b) Un décalage vers le rouge signifie-t-il que l'étoile s'éloigne ou se rapproche de l'observateur ?

**14. Application.**

- a) Pour les systèmes Terre-Soleil, puis Jupiter-Soleil, observés depuis un autre système stellaire selon un axe d'observation situé dans le plan des orbites, calculer les valeurs de  $q$ ,  $v$  et de l'amplitude maximale de variation de  $\lambda_a$  sur une orbite (pour une longueur d'onde moyenne  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ ).
- b) La détection du mouvement d'une étoile *via* des mesures spectroscopiques usuelles (par exemple, comme celles effectuées lors des séances de travaux pratiques) semble-t-elle aisée ?
- c) L'approximation non relativiste adoptée a priori pour le calcul du décalage Doppler apparaît-elle fondée ?

**I.2. Recherche de vie sur des planètes extra-solaires.****I.2.a. Limites de la zone habitable.**

On définit la zone habitable comme étant la région des orbites de planètes pouvant présenter de l'eau sous forme liquide.

**15. Température minimale.**

- a) Représenter le diagramme de phase de l'eau (température  $T$  en abscisse et pression  $P$  en ordonnée).
- b) Définir le point triple. Pour l'eau, ses coordonnées sont : ( $T_t = 273,16 \text{ K}$ ,  $P_t = 611 \text{ Pa}$ ).
- c) Évaluer numériquement la pente de la courbe de fusion.  
Il en résulte que ce changement d'état s'opère à une température quasi indépendante de la pression.
- d) En déduire la température minimale  $T_{\min}$  d'une planète dans la zone habitable.

La borne supérieure  $T_{\max}$  de la température de la zone habitable est plus difficile à définir. Pour simplifier, on la choisira ici égale à  $363 \text{ K}$  (soit  $90^\circ$ ) - au-delà, dans une large gamme de pression, la plupart des molécules organiques se dégradent.

Les planètes ont une température de surface moyenne qui est en première approximation déterminée par un équilibre entre le rayonnement thermique reçu de l'étoile et celui perdu spontanément par la planète. En appliquant la loi de Stefan du rayonnement du corps noir à l'étoile et à la planète, on obtient une forme approchée de la température d'équilibre de la planète en fonction de sa distance  $R$  à l'étoile (de rayon  $r_e$  et température de surface  $T_e$ ) :

$$T_p = T_e \sqrt{\frac{r_e}{2R}}.$$

16. Exprimer les bornes inférieure  $R_{\min}$  et supérieure  $R_{\max}$ , de la distance  $R$ , délimitant la zone habitable autour de l'étoile.

Calculer ces bornes pour le système solaire. On les exprimera en unité de distance Terre-Soleil (aussi appelée ua, pour « unité astronomique »). Commenter.

**I.2.b. Bio-signature d'une présence de vie.**

Dans la suite de ce problème on considère que la présence d' $O_2$  dans l'atmosphère d'une planète, située dans la zone habitable autour d'une étoile, est une signature de la présence de vie évoluée. On se propose d'examiner comment la méthode des transits étudiée en section I.1.b permet de rechercher cette bio-signature.

17. On souhaite déterminer le profil vertical de la masse volumique  $\rho = \rho(z)$  de l'atmosphère de la planète. Traduire l'équilibre des forces de pression et de gravité sur un volume élémentaire d'atmosphère d'épaisseur  $dz$  et de surface  $S$ . On note  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  le champ de pesanteur, supposé *a priori* uniforme sur le domaine d'étude.

18. En assimilant l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire  $\mu$  et de température  $T_p$  uniforme, montrer que :

$$\rho(z) = \rho(z = 0) \exp(-z/H),$$

où  $H = \mathcal{R}T_p/(\mu g)$  est une longueur caractéristique.

19. Calculer la valeur de  $H$  pour une planète identique à la Terre mais dont l'atmosphère serait composée uniquement d' $O_2$ .

L'hypothèse adoptée considérant que  $g$  est uniforme est-elle, ici, justifiée ?

20. Lors d'un transit de la planète devant l'étoile, l'atmosphère accroît le rayon apparent de la planète et intensifie le phénomène d'éclipse, comme l'illustre la figure ci-dessous. Nous identifions  $H$  à l'épaisseur de la couche atmosphérique et notons  $\varepsilon$  son facteur de transmission de la lumière ( $\varepsilon = 1$  pour une atmosphère parfaitement transparente, ou  $\varepsilon = 0$  pour une atmosphère opaque). On considère que l'atmosphère est uniformément dense et on néglige les variations de longueur de sa traversée par la lumière de l'étoile, en fonction de l'altitude.

Exprimer, dans ces conditions, la variation relative de flux  $\Delta\Phi_{at}/\Phi$  dû au transit de l'atmosphère.

En étudiant la dépendance de  $\varepsilon$  en la longueur d'onde, on peut éventuellement détecter la présence d'oxygène.

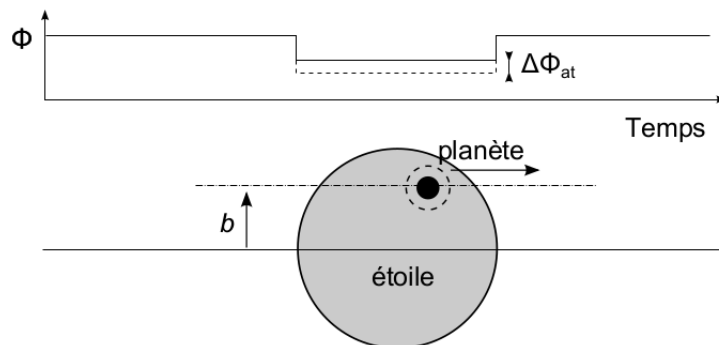


Illustration du phénomène de transit en considérant l'atmosphère de la planète.

## II. Étude d'une installation nucléaire REP

Ce sujet comporte un document réponse à rendre avec la copie.  
Les données numériques utiles sont fournies en fin d'énoncé.

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects liés au fonctionnement d'une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée). Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP est constituée de deux grandes zones (voir figure 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s'écoule de l'eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l'électricité, ensuite elle est condensée au contact d'un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d'être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l'énergie thermique et chauffent ainsi l'eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de  $5000\text{ m}^2$  (réseau de tubulures).

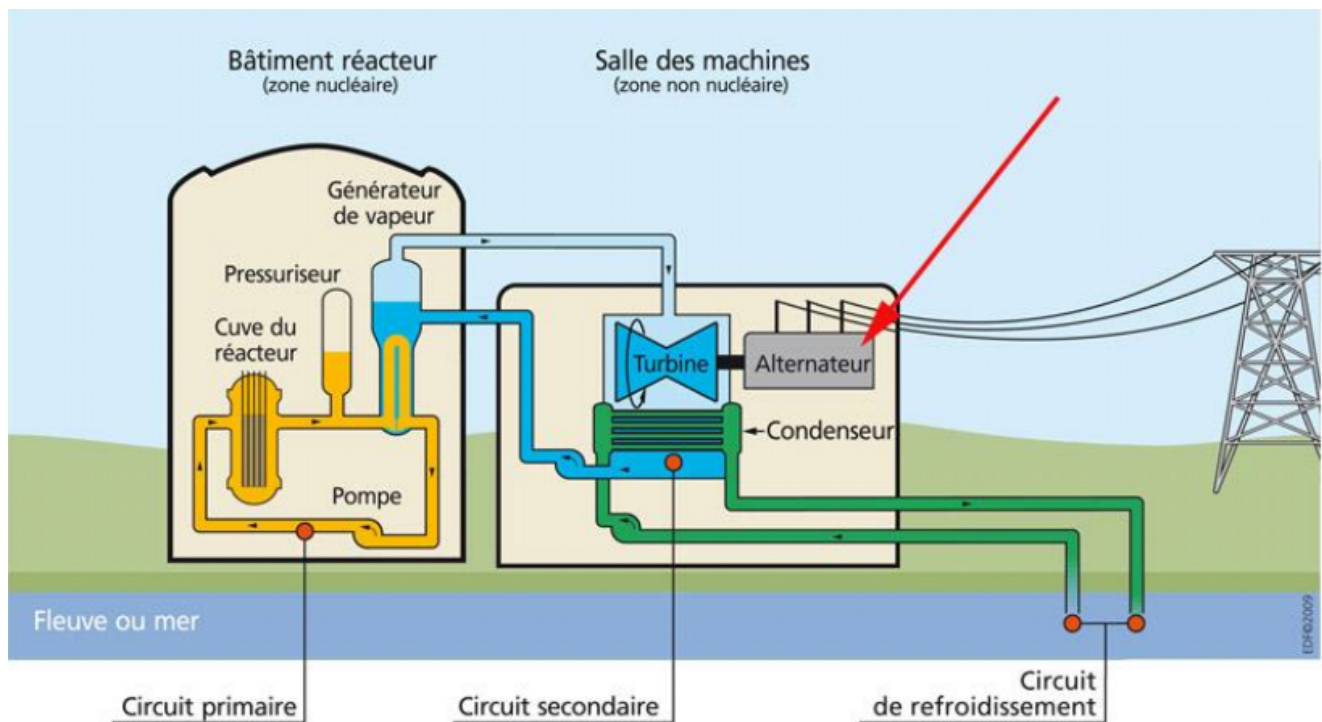


FIGURE 1 – Schéma global d'une centrale nucléaire

### Description du circuit secondaire de la centrale

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique  $P_e = 900\text{ MW}$ . Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau.

## Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température  $T_{\text{ch}}$  et  $T_{\text{fr}}$  ( $T_{\text{fr}} < T_{\text{ch}}$ ), constantes.

1. Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement de Carnot  $\rho_C$  associé à ce cycle.
2. Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant  $T_{\text{ch}} = 543 \text{ K}$  et  $T_{\text{fr}} = 303 \text{ K}$ , les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.
3. Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique  $P_t = 2785 \text{ MW}$ , que vaut le rendement thermodynamique réel  $\rho_R$  de l'installation? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

## Cycle de Rankine

L'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la figure 2) :

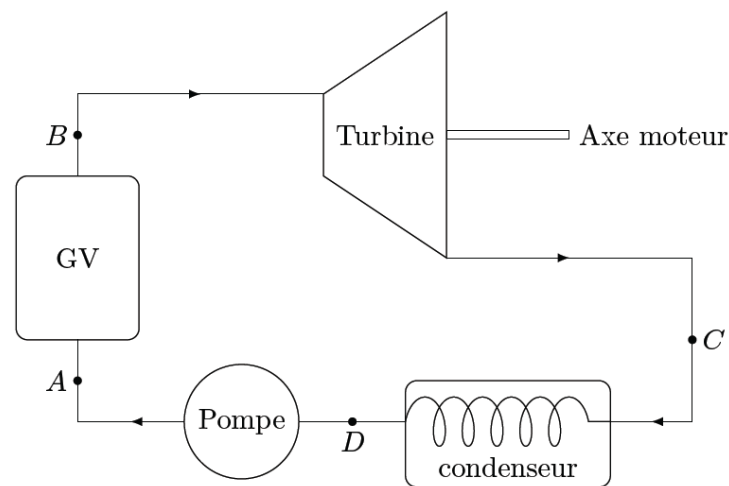


FIGURE 2 – Cycle de Rankine

- de  $A$  à  $B$  : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression  $P_2 = 55 \text{ bar}$  jusqu'à un état de liquide saturant (état noté  $A'$ ), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état  $B$ ) ;
  - de  $B$  à  $C$  : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression  $P_2$  jusqu'à la pression  $P_1 = 43 \text{ mbar}$  ;
  - en  $C$ , le fluide est diphasé ;
  - de  $C$  à  $D$  : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
  - de  $D$  à  $A$  : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2$ , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.
4. Représenter dans le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes  $T_B$ ,  $T_D$  et  $T_{\text{critique}}$ , cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
  5. D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points  $A'$ ,  $B$  et  $D$ ? On donnera les valeurs sous forme de tableau.

6. Dans le document réponse figure le diagramme enthalpique  $(P, h)$  de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points  $A'$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  du cycle. On explicitera la méthode.
7. Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques. Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile  $w_u$  et le transfert thermique massique  $q$  entre 2 points d'un circuit.
8. Exprimer le travail massique  $w_{BC}$  reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique, en s'aidant du diagramme enthalpique.
9. Exprimer le transfert thermique massique  $q_{AA'}$  reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température  $T_A$  à la température  $T_{A'}$  dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique : on considérera  $T_A \approx T_D$ .
10. Exprimer le transfert thermique massique  $q_{A'B}$  reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.
11. Calculer alors le rendement de Rankine,  $\rho$ , de l'installation. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.
12. Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente de la turbine? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine?

### Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir figure 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine «haute pression» puis dans une turbine «basse pression». D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un «surchauffeur».

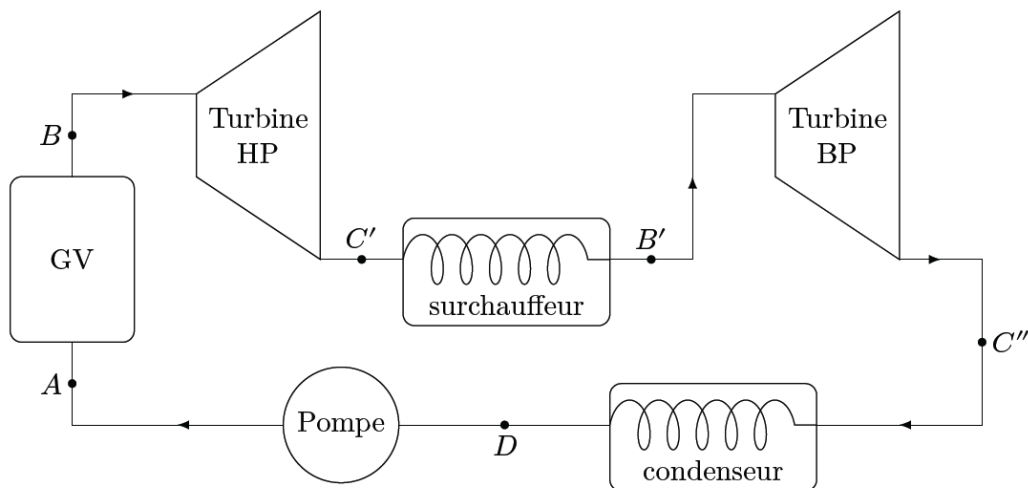


FIGURE 3 – Cycle de Rankine avec une détente étagée

Les transformations sont maintenant modélisées par :

- de  $A$  à  $B$  : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression  $P_2 = 55$  bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté  $A'$ ), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point  $B$ ) ;
- de  $B$  à  $C'$  : détente adiabatique réversible dans la turbine «haute pression», de la pression  $P_2$  à la pression  $P_3 = 10$  bar ;
- de  $C'$  à  $B'$  : échauffement isobare à la pression  $P_3$ , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point  $B'$ ) ;



- de  $B'$  à  $C''$  : détente adiabatique réversible dans la turbine «basse pression», de la pression  $P_3$  à la pression  $P_1 = 43 \text{ mbar}$  ;
  - de  $C''$  à  $D$  : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
  - de  $D$  à  $A$  : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2$ , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.
13. Placer les nouveaux points  $C'$ ,  $B'$ ,  $C''$  sur le diagramme enthalpique du document réponse.
14. Comparer les titres massiques en vapeur des points  $C'$  et  $C''$  au titre massique en vapeur du point  $C$ . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
15. Définir le nouveau rendement du cycle. À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer sa valeur numérique. Commenter.

### Enrichissement de l'uranium par centrifugation

Certains noyaux sont susceptibles de fissionner sous l'effet d'un bombardement de neutrons «lents» (vitesse de  $2,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) : on parle alors de noyaux fissiles. Le seul isotope fissile naturel est l'uranium-235. Dans les réacteurs REP, on privilégie cette fission par neutrons lents. Or l'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore alors le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel avec de l'uranium-235.

Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium ( $UF_6$ ). Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses qui vont l'enrichir en uranium-235 jusqu'à la teneur souhaitée (de 3 à 5%). Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous forme de pastilles.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  et de hauteur  $h = 5 \text{ cm}$ , tournant autour d'un axe vertical ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire constante  $\omega = 50\,000 \text{ revolution} \cdot \text{min}^{-1}$ . Le gaz d'hexafluorure d'uranium  $UF_6$  est introduit dans le cylindre. Les molécules  $^{235}UF_6$  et  $^{238}UF_6$  de masses différentes se répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On note  $\mathcal{R}_0$  un référentiel lié au laboratoire, d'axe vertical ( $Oz$ ). On suppose que  $\mathcal{R}_0$  est galiléen. On considère, dans un premier temps, que le cylindre est rempli d'un gaz, supposé parfait, constitué de molécules identiques de masse  $m$ . L'ensemble est à la température  $T = 353 \text{ K}$ .

Soit un volume élémentaire de gaz  $d^3\tau$  autour d'un point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'axe ( $Oz$ ) de la centrifugeuse. On note  $P(M) = P(r)$  le champ de pression dans le gaz,  $\rho(r)$  la masse volumique du gaz et  $n^*(r)$  sa densité particulaire.

16. Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ . On donnera l'expression des forces volumiques correspondantes (sans démonstration).

Le formulaire en fin de problème rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques.

17. Du fait de sa rotation par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R}_1$  est non-galiléen. Pour prendre en compte l'effet de cette rotation, on doit alors ajouter aux forces précédentes une pseudo-force, appelée «force centrifuge», dont l'expression volumique s'écrit :

$$\rho\omega^2 r \vec{e}_r$$

où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ).

Déterminer le rayon à partir duquel la force centrifuge volumique domine la force volumique de pesanteur. Justifier que, par la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.

18. Dédurre le gradient de pression  $\frac{dP}{dr}$  de la condition d'équilibre de la particule de fluide dans  $\mathcal{R}_1$ .

19. En reliant  $P$  à  $n^*$ , ainsi que  $\rho$  à  $n^*$ , déterminer la répartition  $n^*(r)$  des molécules dans le cylindre. On notera  $n^*(0)$  la densité particulaire sur l'axe de rotation et on donnera l'expression de  $n^*(r)$  en fonction de  $n^*(0)$ ,  $m$ ,  $T$ , la constante de Boltzmann  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ ,  $r$  et  $\omega$ .
20. Montrer que la répartition  $n^*(r)$  ainsi trouvée obéit à une statistique de Maxwell-Boltzmann, avec une énergie potentielle  $E_p$  dont dérive la force centrifuge  $\vec{f} = m\omega^2 r \vec{e}_r$ .
21. On donne, en figure 4, l'allure des densités particulières  $n_1^*(r)$  et  $n_2^*(r)$  des molécules  $^{235}\text{UF}_6$  et  $^{238}\text{UF}_6$  en fonction de  $r$ . En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium : on explicitera le protocole qui permet d'obtenir le gaz enrichi en  $^{235}\text{U}$ .

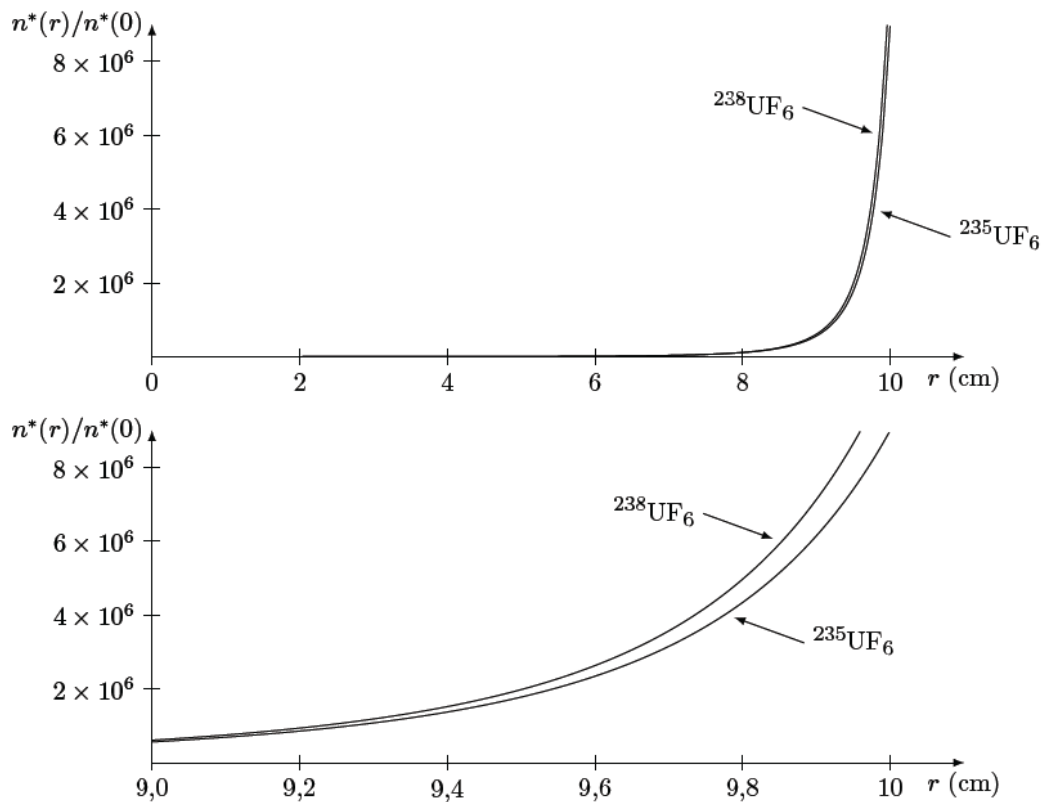


FIGURE 4 – Densités particulières des molécules  $^{235}\text{UF}_6$  et  $^{238}\text{UF}_6$  en fonction de  $r$ . La deuxième courbe zoome sur les rayons les plus grands de la centrifugeuse.

## Données

*Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau*

$\theta$ (°C)	$P_{\text{sat}}$ (bar)	Liquide saturant			Vapeur saturante sèche		
		$v_l$ (m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> )	$h_l$ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	$s_l$ (J·K <sup>-1</sup> ·kg <sup>-1</sup> )	$v_v$ (m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> )	$h_v$ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	$s_v$ (J·K <sup>-1</sup> ·kg <sup>-1</sup> )
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,03505	2788,46	5,9226

$\theta$  température

$s_l$  entropie massique du liquide saturant

$P_{\text{sat}}$  pression de vapeur saturante

$v_v$  volume massique de la vapeur saturante sèche

$v_l$  volume massique du liquide saturant

$h_v$  enthalpie massique de la vapeur saturante sèche

$h_l$  enthalpie massique du liquide saturant

$s_v$  entropie massique de la vapeur saturante sèche

*Capacité thermique massique isobare de l'eau*

$$c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

## Formulaire

*Expression du gradient d'une fonction scalaire  $f(r, \theta, z)$  en coordonnées cylindriques*

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*

**ANNEXE (à rendre avec la copie)**

NOM :

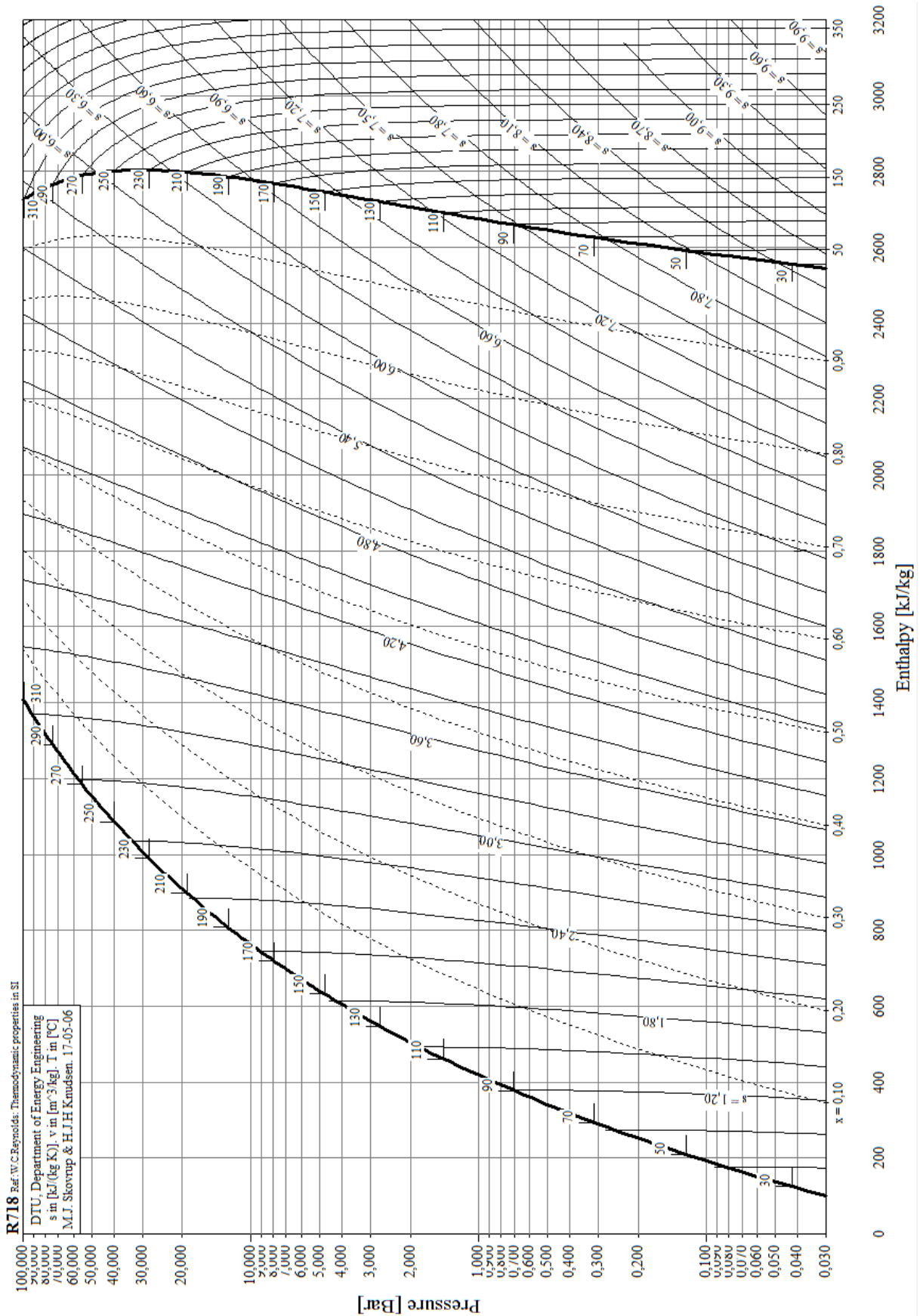


Diagramme enthalpique ( $P, h$ ) de l'eau.