

MÉCANIQUE

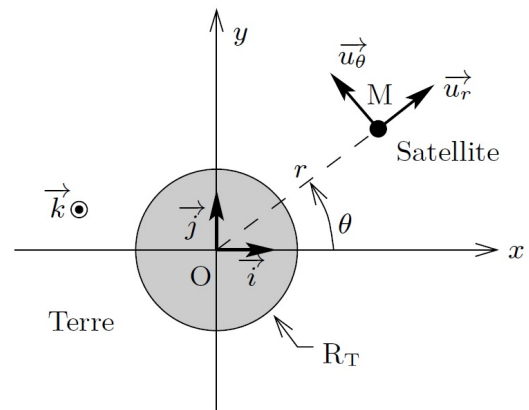
CALCULATRICES AUTORISÉES

Les trois parties sont indépendantes. Le 3ème problème est facultatif

I. Étude d'un satellite de télédétection terrestre

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et cartographie. Nous étudions dans ce sujet un satellite de télédétection, assimilé à un point matériel M de masse $m = 4,0 \times 10^3$ kg, en orbite autour de la Terre de rayon $R_T = 6,4 \times 10^3$ km et de centre O .

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps (noté t).



Préliminaires.

On rappelle que l'interaction \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite peut s'écrire $\vec{F} = -K \frac{\vec{OM}}{OM^3}$.

Dans la suite, sauf indication contraire, on supposera que le satellite est soumis uniquement à \vec{F} .

1. On note $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ la norme du champ de gravitation à la surface de la Terre. Rappeler l'expression de la constante K en fonction de g_0 , m , et R_T . Cette force \vec{F} est-elle attractive ou répulsive ?
2. Montrer que cette force est conservative et exprimer son énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$, avec $r = OM$.
3. Montrer que le moment cinétique en O , noté \vec{L}_O , est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement du satellite est plan.

Dans toute la suite, les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ (cf ci-dessus).

4. Déterminer l'expression du moment cinétique par rapport à O dans la base cylindrique, en fonction de r , $\dot{\theta}$ et m .
5. Justifier que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et montrer qu'elle se met sous la forme :

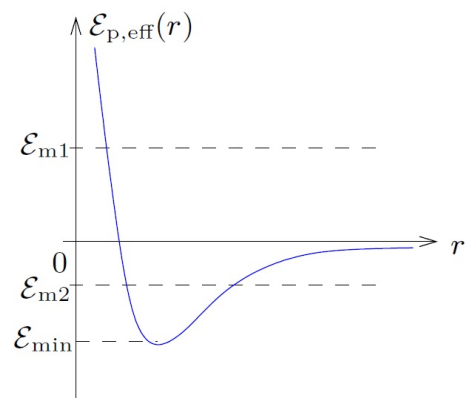
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle effective, à exprimer en fonction de $L_O = \|\vec{L}_O\|$, m , g_0 , R_T et r .

6. Le graphe de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ pour une valeur donnée de L_O est représenté ci-contre. On montre (on ne demande pas de le faire) que la trajectoire du satellite est nécessairement conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

À quelle énergie \mathcal{E}_{m1} ou \mathcal{E}_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? Une trajectoire hyperbolique ? Justifier.

Pour quelle valeur particulière de \mathcal{E}_m la trajectoire est-elle circulaire ?



Mise en orbite circulaire du satellite.

La mise en orbite du satellite se fait en deux étapes :

- phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- phase de satellisation : le satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

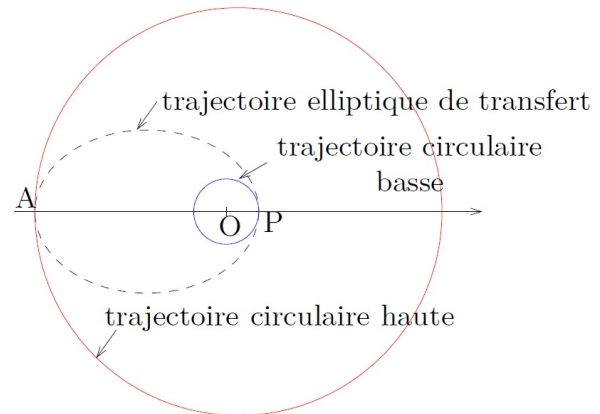
On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

7. Montrer que le mouvement circulaire est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0 , R_T et r .
8. En déduire l'expression des énergies cinétiques \mathcal{E}_c et mécanique \mathcal{E}_m du satellite en fonction de m , g_0 , R_T et r . Justifier le signe de \mathcal{E}_m .
9. Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \times 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \times 10^3$ km.

Mise en orbite haute du satellite.

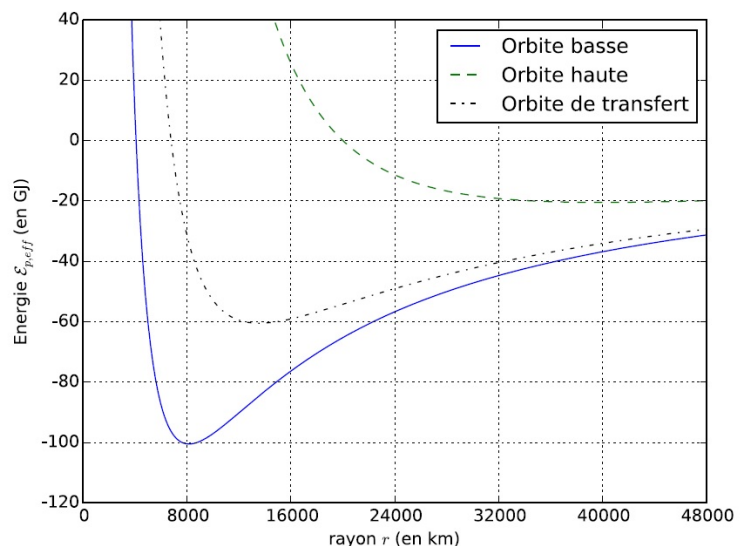
Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8,0 \times 10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40 \times 10^3$ km) comme illustré sur la figure ci-contre.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.



Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer. On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

10. Que peut-on dire des valeurs de \dot{r} lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?
11. Montrer que l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert s'exprime simplement en fonction de K et a uniquement. Donner cette expression.
12. Relever sur la figure ci-dessous la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.
13. Pour changer le satellite de trajectoire, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase, le principe de conservation de l'énergie mécanique n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite. Relever sur la figure ci-dessus la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0 \times 10^3$ km. De même, relever la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute $r_h = 40 \times 10^3$ km.



14. En déduire la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_{mP}$ à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert.
Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg^{-1} , déterminer la masse m_c de carburant nécessaire. Faire l'application numérique.

Chute du satellite.

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement \vec{F}_f de type $\vec{F}_f = -k\vec{v}$.

Supposons que le satellite est au départ en orbite circulaire. La force de frottement étant très faible à haute altitude, on peut considérer que le mouvement reste quasi-circulaire à l'échelle de temps d'une révolution. Toutefois son altitude, sa vitesse et donc son énergie dépendent maintenant lentement du temps. Ainsi, on peut considérer que les expressions suivantes pour l'énergie mécanique et la vitesse restent valables :

$$\mathcal{E}_m(t) = -\frac{K}{2r(t)} \quad \text{et} \quad v^2(t) = \frac{K}{mr(t)}$$

15. Retrouver en fonction de r , l'expression de la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r . Quel est le nom de cette relation ?
16. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon $r(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau}r(t) = 0$$

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m . Montrer que τ est bien homogène à un temps.

17. En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0 .
18. Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ .

II. L'expérience d'Eötvös

Un aspect fondamental de la gravitation est le *principe d'équivalence*. Introduit par Galilée début du XVII^{ème} siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, Newton fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : *la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition*.

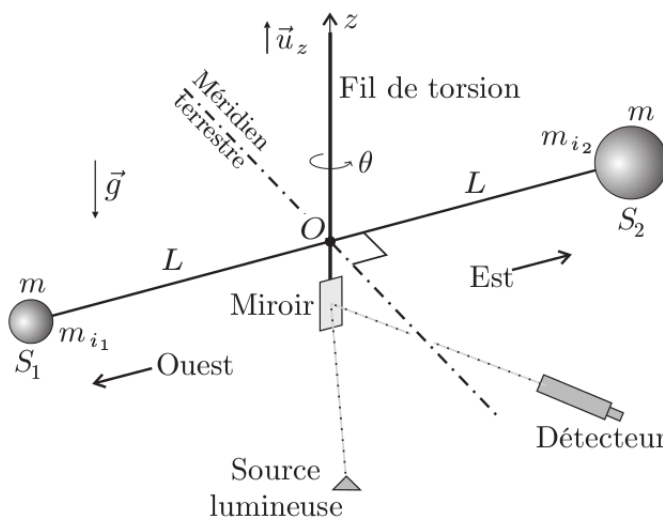
Ce problème propose une description de l'expérience d'Eötvös, ayant permis dès la fin du XIX^{ème} siècle, de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque.

- Qu'appelle-t-on « principe d'inertie » en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen.
La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte* ou *masse inertielle* m_i .
- Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels M_1 et M_2 et faire un schéma. Donner un ordre de grandeur de la constante gravitationnelle \mathcal{G} .
La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante* m .

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielle m_i et grave (ou pesante) m comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielle et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes. Cette méthode, d'abord décrite par Galilée, a été menée par Newton (1686) ou encore Bessel (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre 10^{-3} et 10^{-5} . L'invention du pendule de torsion par Eötvös autour de 1888, permet d'augmenter fortement la sensibilité.

II.1. Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'Eötvös utilise un pendule de torsion. Le dispositif simplifié est représenté sur la figure ci-dessous. Deux sphères appelées S_1 et S_2 , homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C . On note m_{i1} et m_{i2} les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2 .



La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz . Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ . Sa position est alors repérée à l'aide d'une lunette par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan fixé au milieu de la barre.

On note \mathcal{R} le référentiel du laboratoire centré sur O et *supposé galiléen dans cette sous-partie* où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.

On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical Oz et J le moment d'inertie du système $\mathcal{S} = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$ par rapport Oz . On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en O a pour intensité $\mathcal{M}_0 = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

3. Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle $E_{p,S}$ de \mathcal{S} en fonction de C et $\theta - \theta_0$; on choisira $E_p(\theta_0) = 0$. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,S}$ du solide \mathcal{S} . En déduire l'expression de l'énergie mécanique de \mathcal{S} en fonction de C , J , θ , θ_0 et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
4. On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $P_{\text{frot}} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
5. a) On observe des oscillations très faiblement amorties. À quelle condition sur les constantes J , C et α cela est-il possible?
 - b) Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la limite θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$?
 - c) Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$. À quelle condition sur ε l'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est-elle inférieure à 1%? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$. On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0,2 \text{ kg}$. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

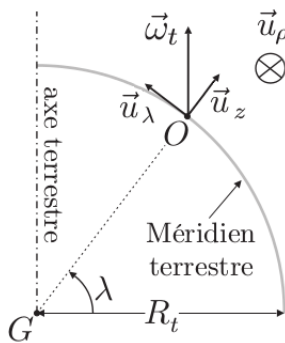
L (m)	$6,0 \times 10^{-2}$	$7,0 \times 10^{-2}$	$8,0 \times 10^{-2}$
T (s)	436	509	581

6. a) En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2 , L^2 , J_0 , J_1 , m et C .
 b) Dédire des résultats de mesure une estimation numérique de la constante de torsion C .
 c) Compte-tenu des ordres de grandeurs obtenus, montrer que l'on peut écrire

$$m \approx \frac{C}{8\pi^2} \frac{T^2}{L^2}$$

II.2. Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel \mathcal{R} du laboratoire centré sur O n'est plus supposé galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la Terre sur les masses inertes m_{i1} et m_{i2} a priori différentes des deux sphères. On se place donc dans le référentiel \mathcal{R}_t attaché au centre de masse G de la Terre, qui est non galiléen. On admet qu'on peut appliquer les théorèmes habituels à condition d'ajouter des forces d'inertie.



La Terre est supposée sphérique de rayon $R_T = 6,4 \times 10^3$ km, en rotation uniforme à la vitesse ω_T positive autour de l'axe terrestre (axe de rotation propre de la Terre). Le point O se trouve à la latitude λ . Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure ci-contre.

On rappelle^a que dans \mathcal{R}_t les masses m_{i1} et m_{i2} subissent chacune la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{i_j} = m_{i_j} \omega_T^2 \overrightarrow{HO}$$
 pour $j = 1$ ou 2 ,

où H est le projeté orthogonal de O sur l'axe terrestre.

a. cf programme de SPE...

L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration précédente, on relève une valeur $\theta_{\infty 1}$ pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle π afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur $\theta_{\infty 2}$ pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

7. a) Faire un schéma et représenter H . Déterminer les composantes du vecteur \overrightarrow{HO} dans la base $(\vec{u}_z, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\lambda)$ en fonction de λ et R_T . Faire de même pour les vecteurs \overrightarrow{OM}_1 et \overrightarrow{OM}_2 en fonction de L et θ (on rappelle que $\theta = 0$ lorsque la barre du pendule est orthogonale au plan méridien).
 b) En déduire le moment $\mathcal{M}_{i_j}^z$ de la force \vec{F}_{i_j} selon l'axe Oz , pour $j = 1$ et $j = 2$, en fonction de m_{i1} ou m_{i2} et de λ , L , ω_T , R_T , et l'angle θ .
8. En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2}$ entre les deux expériences en fonction de λ , C , L , ω_T , R_T , m_{i1} et m_{i2} . On pourra faire l'approximation $\cos \theta_{\infty j} \approx 1$.
9. La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de 1,0 mm à 2,0 m de distance. En utilisant l'expression de m trouvée à la question 6., déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport $\delta_m = \frac{m_{i1} - m_{i2}}{m}$. On donne $\lambda = 45^\circ$ et $L = 6,0$ cm.
10. La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?

III. Record du TGV : 574,8 kilomètres par heure !

Le mardi 3 avril 2007, à 13 h 14, la SNCF, associée à Réseau Ferré de France ainsi qu'à la compagnie ALSTOM portait le record du monde de vitesse sur rail à la valeur de $574,8 \text{ km.h}^{-1}$ au point kilométrique 194 de la ligne à grande vitesse est-européenne, grâce à la rame TGV Duplex V150 composée de deux motrices POS encadrant trois remorques. La remorque centrale était équipée à chaque extrémité de deux essieux moteurs AGV. Pour réaliser cet exploit de nombreux paramètres physiques et techniques ont été étudiés et optimisés ; dans le problème qui suit nous allons en examiner quelques uns. On se focalisera exclusivement sur des aspects liés à la trajectoire en ligne droite.



Les caractéristiques techniques du TGV, dont toutes ne sont pas utilisées dans le problème, sont les suivantes : masse de la rame avec ses passagers $M_T = 270$ tonnes ; longueur de la rame, $L_T = 106$ m ; largeur de la rame, $l_T = 2,9$ m ; hauteur de la rame, $h_T = 4,1$ m. Dans tout le problème, la masse volumique de l'air sera constante et égale à $\rho_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, et par souci de simplicité, dans les applications numériques, on prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ pour la valeur de l'accélération de la pesanteur terrestre et on n'utilisera que 3 chiffres significatifs.

Lors d'un essai réalisé durant la campagne préalable à la tentative de record sur une voie approximativement rectiligne et plus ou moins horizontale, on a relevé les données suivantes

t (s)	0	70	95	124	155	231	263	362
V (km.h^{-1})	0	150	200	250	300	350	400	450

1. a) Calculer sur chaque intervalle de mesure $[t_{i+1}; t_i]$ les valeurs de l'accélération moyenne de la rame, notées a_i . On exprimera ces valeurs en m.s^{-2} dans un tableau récapitulatif.
- b) Exprimer la distance d_i parcourue pendant chacun de ces intervalles de temps, en fonction de v_i , v_{i+1} , t_i et t_{i+1} , en supposant l'accélération effectivement constante pendant l'intervalle. Estimer et consigner ces valeurs dans le même tableau.
- c) En déduire numériquement la distance totale D nécessaire pour atteindre la vitesse de 450 km.h^{-1} .

Un petit pendule simple constitué d'une masselotte au bout d'un fil est suspendu au plafond d'une voiture du train. Pendant la phase d'accélération, le pendule s'incline en arrière d'un angle α par rapport à la verticale. Cet angle se stabilise à une valeur constante si l'accélération est constante. de telle sorte que l'accélération de la masselotte est la même que celle du train (si celle-ci évolue suffisamment lentement).

2. Représenter géométriquement la relation vectorielle associée au Principe fondamental de la dynamique appliqué à la masselotte dans le référentiel galiléen terrestre, lorsque α est constant. Calculer l'inclinaison α du pendule par rapport à la verticale durant le début de l'essai (a_0).

La rame repose sur les rails par l'intermédiaire de seize essieux, dont douze moteurs, composés chacun de deux roues. La force tangentielle moyenne \vec{T} appliquée par les rails sur chaque jante *des roues motrices* est appelée *force de traction à la jante*. Dans toute la suite, on admettra qu'on peut négliger la force de frottement appliquée par les rails sur les roues non motrices.

Au niveau du contact jante-rail, on modélise le coefficient de frottement statique μ par la loi empirique de Curtius et Kniffer (1943), qui prend en compte l'influence de la vitesse V du train (pour un rail sec et propre) selon $\mu = 0,161 + 7,5/(44 + V)$ si V est exprimée en km.h^{-1} .

Lors du mouvement, un certain nombre de causes de frottements produisent une force résultante d'intensité $R = A + BV + CV^2$ qui s'oppose à la vitesse V du train. Cette intensité R est appelée résistance à l'avancement. Pour la rame V150 du record qui ne comportait que 3 remorques et pour laquelle quelques modifications d'aérodynamisme avaient été apportées, les paramètres de la résistance à l'avancement sont $A = 1700 \text{ N}$, $B = 20,1 \text{ N.km}^{-1}.\text{h}$ et $C = 0,37 \text{ N.km}^{-2}.\text{h}^2$.

3. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la rame entière, calculer la force de traction à la jante au démarrage. Montrer qu'il n'y avait pas de patinage possible des roues au démarrage.
4. La puissance totale des moteurs embarqués lors du record était de $\mathcal{P}_m = 19,6$ MW.
 - a) Pour une rame TGV Duplex standard de 2 motrices et 8 remorques, la SNCF adopte les valeurs $A = 2700$ N, $B = 31,8$ N.km⁻¹.h et $C = 0,535$ N.km⁻².h². Cette puissance \mathcal{P}_m est-elle suffisante pour permettre à une rame TGV Duplex standard d'atteindre la vitesse du record précédent qui était de 540 km.h⁻¹ ?
 - b) Montrer que pour la rame TGV V150, le record n'est possible que dans une zone de descente. Estimez l'angle β caractérisant la pente de celle-ci.
 - c) Pour le record visé, la rame TGV V150 avait été modifiée par rapport à une rame standard et notamment les diamètres des roues avaient été agrandis, passant de 920 mm à 1092 mm. Quelle est la raison de cet agrandissement des roues ?

Lors d'un essai en terrain horizontal dans la phase de préparation, un incident a déclenché le freinage d'urgence alors que la rame roulait à la vitesse $V_0 = 506$ km.h⁻¹. La rame s'est immobilisée au bout d'une distance $d_a = 15$ km.

5. En supposant le mouvement uniformément accéléré, calculer la décélération moyenne a durant le freinage, et la durée de ce freinage.
6. Le protocole de freinage habituel comporte plusieurs phases. Dans la première on ouvre le disjoncteur, les moteurs sont alors en circuit ouvert, c'est la « marche sur l'erre ».
 - a) Calculer la décélération aux alentours de 500 km.h⁻¹ pour la rame V150.
 - b) On note $x(t)$ la distance parcourue depuis l'ouverture du disjoncteur à l'instant $t = 0$. En ne considérant que le terme en V^2 dans la résistance à l'avancement (pour cette question uniquement), exprimer $x(t)$ en fonction de t , de la vitesse initiale V_0 de la rame et de la durée $\tau = M_T/(CV_0)$ dont on précisera la valeur numérique en secondes. On marche sur l'erre pour abaisser la vitesse à 400 km.h⁻¹. Quelle est la distance parcourue pendant cette marche ?
7. Dans une seconde phase, le fonctionnement de certains moteurs est inversé : chacun des quatre moteurs POS devient une dynamo connectée à une résistance $R_M = 0,97 \Omega$ refroidie par un débit d'air important. Ce débit est adapté à la puissance de 900 kW dégagée par effet Joule dans la résistance. Quelle est la décélération dans cette deuxième phase, autour de 400 km.h⁻¹ ?

La fin du freinage était assurée par de classiques disques de frein sur les essieux non moteurs qui ont été portés à plus de 800°C sans déformation ni usure anormale !

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *