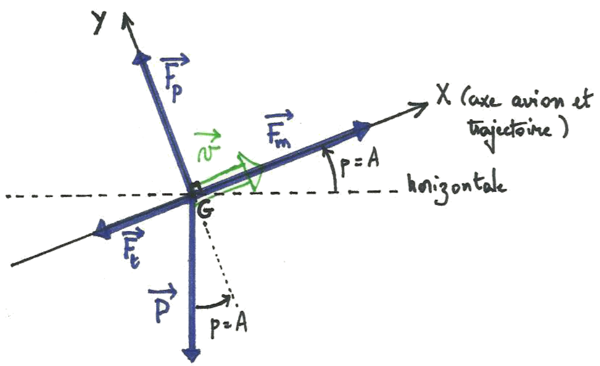
# MÉCANIQUE

***d'après TSI 2015***

## I. Mécanique du vol d'un avion

### I.1. Vol en montée

**1.**




**2.** Le mouvement étant rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre considéré galiléen, la somme des forces est nulle d'après la **seconde loi de Newton** :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{P} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_p = mg\cos A} \ \text{(selon } GY\text{) et } \boxed{F_m = F_t + mg\sin A} \ \text{(selon } GX\text{)}.$$

(les symboles sans flèches sont définis comme des normes dans l'énoncé).

**3.** La première projection $(GY)$ conduit à la vitesse en norme : $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}}$.

**4.** Des deux équations on tire $\boxed{F_m = mg\cos A\left(\dfrac{C_t}{C_p} + \tan A\right)}$.

D'autre part $\mathcal{P}_m = F_m v$, donc $\boxed{\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}\,(\cos A)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \dfrac{C_p}{C_t}\tan A\right)}$ avec $\boxed{\mathcal{P}_{m0} = \dfrac{C_t}{C_p}\sqrt{\dfrac{2m^3g^3}{\rho S C_p}}}$. En effet on retrouve bien $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}$ pour $A = 0$. On obtient $\underline{\mathcal{P}_m = 20\,\text{kW}}$.

**5.** En linéarisant, on obtient $\mathcal{P}_{\max} \approx \mathcal{P}_{m0}\,(1 + \frac{C_p}{C_t}A)$ d'où $\boxed{A \approx \dfrac{C_t}{C_p}\left(\dfrac{\mathcal{P}_{\max}}{\mathcal{P}_{m0}} - 1\right)} = \underline{0,050\,\text{rad} = 2,9\,°}$.

**6.** Par projection, $v_z = v\sin A$ d'où $\boxed{v_z = \sqrt{\dfrac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}\sin A} = \underline{1,3\,\text{m.s}^{-1}}$.

*Remarque : cette valeur semble étonnamment faible...*

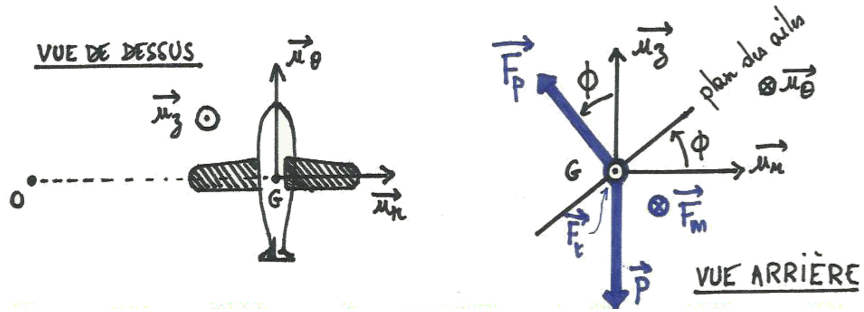
**7.** On obtient $\boxed{\eta = \dfrac{F_p}{mg} = \cos A} = \underline{1,0}$. Lorsque l'avion vole quasi horizontalement, le poids est quasi intégralement supporté par la portance.





### I.2. Vol en virage

**8.** On suppose que le cercle est centré en l'origine $O$.




**9.** Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération vaut $-\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r$. Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit donc maintenant $\boxed{\vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{P} = -m\dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_r}$.

**10.** On projette cette équation le long des trois vecteurs de la base cylindrique :

$$(\vec{u}_r) : \quad F_p\sin\Phi = m\frac{v^2}{R} \quad , \quad (\vec{u}_\theta) : \quad F_m = F_t \quad \text{et} \quad (\vec{u}_z) : \quad F_p\cos\Phi = mg\,.$$

En faisant le quotient de la première et la dernière équation, on obtient $\boxed{R = \dfrac{v^2}{g\tan\Phi}}$.

**11.** Cette fois on a $\boxed{\eta = \dfrac{F_p}{mg} = \dfrac{1}{\cos\Phi}}$.

**12.** On a donc un angle maximal $\Phi_{\max}$ tel que $\cos\Phi_{\max} = \frac{1}{\eta_{\max}}$, donc un rayon minimal $R_{\min} = \frac{v^2}{g\tan\Phi_{\max}}$. Comme $\tan\Phi_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\Phi_{\max}} - 1}$, on obtient finalement $\boxed{R_{\min} = \dfrac{v^2}{g\sqrt{\eta_{\max}^2 - 1}}}$.

## II. Étude mécanique d'un accéléromètre

***Mise en équation***

**13.** $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -k\,(\ell_1 - \ell_0)\,\vec{u}_x + k\,(\ell_2 - \ell_0)\,\vec{u}_x = -k\,(\ell_1 - \ell_2)\,\vec{u}_x$. Si $X = 0$, les ressorts ont une longueur $\ell_1 = \ell_2 = \frac{L}{2} - \frac{d}{2}$, en notant $d$ la distance entre les points d'attache sur la masse mobile. Donc plus généralement on a $\ell_1 = \frac{L}{2} - \frac{d}{2} + X$ et $\ell_2 = \frac{L}{2} - \frac{d}{2} - X$. Finalement $\ell_1 - \ell_2 = 2X$ et donc $\boxed{\vec{T} = -2k\,X\,\vec{u}_x}$.

**14.** On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen. Le vecteur position du centre d'inertie de la masse est repérée par $\vec{OC} = (x_B + X)\,\vec{u}_x + z_C\,\vec{u}_z$, avec $z_C =$ constante. Donc $\vec{a}_{C/\mathcal{R}} = (\ddot{x}_B + \ddot{X})\,\vec{u}_x = \vec{a} + \ddot{X}\,\vec{u}_x$. Par ailleurs, $\vec{F}_f = -2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)\vec{u}_x = -2f\dot{X}\,\vec{u}_x$.
En l'absence de frottements secs, la réaction du support est normale et donc compense le poids car le mouvement est horizontal : $-mg\vec{u}_z + \vec{N} = \vec{0}$.
Ceci conduit selon $\vec{u}_x$ à

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{\sqrt{2}f}}.$$

**15.** $\omega_0$ est la **pulsation propre** de l'oscillateur, c'est-à-dire la pulsation du **régime libre harmonique** (en l'absence de frottements).
$Q$ est le **facteur de qualité** de l'oscillateur, qui représente :
i) la **propension à préserver son énergie** en régime libre, mais aussi
ii) la **propension à résonner** au voisinage de la pulsation $\omega_0$ en régime sinusoïdal forcé.
On a $\boxed{[\omega_0] = \mathrm{T}^{-1}}$ et $\boxed{[Q] = 1}$.

### *Étude de la réponse harmonique*

**16.** L'équation différentielle est **linéaire à coefficients constants** donc la réponse à un forçage sinusoïdal est sinusoïdale de même pulsation, mais déphasée : $\boxed{X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$.

**17.** Posons $\underline{a} = \underline{a}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{a}_m = a_m$, et $\underline{X} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$. Puis on passe l'équation différentielle en complexes :

$$(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\,\underline{X} = -\underline{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underline{X}_m = \frac{-\underline{a}_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}}.$$

**18.** On a donc $\boxed{\underline{H} = -\frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$ en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Donc $\boxed{\underline{H} \underset{x\to 0}{\sim} -1}$ et $\boxed{\underline{H} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$.

Ainsi, pour $\boxed{f \ll f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}}$, on a $\boxed{X \approx -\frac{a}{\omega_0^2}}$.

**19.** Le gain vaut $\boxed{|\underline{H}| = \left((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$. Par dérivation, on trouve que cette fonction admet un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui est le cas ($Q \approx 5$), en la fréquence $\boxed{f_r = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$. Le gain vaut alors $\boxed{|\underline{H}|(f_r) = Q\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

**20.** On obtient $\boxed{f_0 = f_r\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \underline{5{,}6\,\mathrm{kHz}}$ et $\underline{|\underline{H}|(f_r) \approx 5{,}0}$.
L'accéléromètre doit fournir un signal représentatif des accélérations subies. Donc on souhaite l'utiliser dans le domaine des basses fréquences $f \ll f_r \approx f_0$, c'est-à-dire $\underline{f \lessapprox 500\,Hz}$, de telle sorte que **son gain soit approximativement indépendant de la fréquence**.

**21.** Une accélération constante correspond à un signal de fréquence nulle. Donc on considère le gain statique : $X_m = \frac{g}{\omega_0^2}$, ce qui conduit à $\boxed{X_m = \frac{g}{4\pi^2 f_r^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)} = \underline{8 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}}$.
Ce déplacement est extrêmement faible, ce qui implique des techniques de conception mécanique nanométriques.

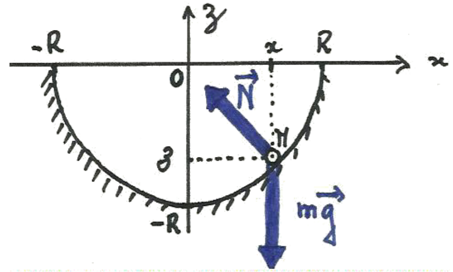




# III. BONUS

**22.**

On note $0xz$ le plan du mouvement, avec l'axe vertical $Oz$ dirigé vers le haut. On place le centre du bol à l'origine, donc son équation coïncide avec celle de la sphère $x^2+y^2+z^2 = R^2$, dont on considère la section plane par $y = 0$. Donc le fond du bol est repéré dans $Oxz$ par l'équation $\boxed{z = f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}}$. Cette relation élimine un degré de liberté, il n'en restera donc qu'un seul : choisissons $x$.




Le système étant soumis uniquement à son poids et à la réaction normale du bol, il est **conservatif**, avec pour énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}m(1 + \frac{\dot{z}^2}{\dot{x}^2})\,\dot{x}^2 + mgf(x) = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\,\dot{x}^2 + mgf(x)$$

La **position d'équilibre stable** correspond à $z$ minimal, donc à $x = 0$ et $z = -R$ (on vérifie bien que $f'(0) = 0$). On développe l'énergie mécanique au voisinage de cette position $x = 0$ au premier ordre non nul en $x$ (et $\dot{x}$) :

$$E_m \approx \frac{1}{2}m(1 + f'(0)^2)\,\dot{x}^2 + mg\left(f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\right) = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - mgR + \frac{mg}{2R}\,x^2$$

car $f'(0) = 0$ et $f''(x) = \frac{R^2}{(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2}}$.
*Remarque : on peut aussi effectuer un développement limité de $E_p(x)$ en utilisant les D.L. usuels, à savoir ici $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ au voisinage de zéro avec $\varepsilon = -\frac{x^2}{R^2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.*

Comme $E_m =$constante, on obtient l'équation du mouvement en dérivant par rapport au temps puis en simplifiant par $\dot{x}$ :

$$m\ddot{x} + \frac{mg}{R}\,x = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}.$$

La période des petites oscillations est donc $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$.

*Remarque : on pourrait ici exprimer le problème plus simplement en coordonnées polaires car le mouvement est circulaire (avec $\theta = (\widehat{-\vec{u}_z; \vec{u}_x})$) :*

$$z = -R\cos\theta \quad \textit{et} \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \quad \textit{donc} \quad E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta) \quad \textit{avec} \quad E_p(\theta) = -mgR\cos\theta\,.$$

*Ceci conduit à l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$.*
*Ici l'approche choisie en coordonnées cartésiennes a le mérite d'être générale c'est-à-dire d'être adaptée à l'étude d'un profil de forme quelconque (pas forcément sphérique).*

**23.** Il y a trois paramètres physiques dont dépend le système physique décrit : $m$, $g$ et $R$. On cherche l'expression de $T_0$ sous la forme $T_0 = k\,m^\alpha\,g^\beta\,R^\gamma$, où $k > 0$ et $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des constantes. Par analyse dimensionnelle on obtient :

$$[T_0] = \mathrm{T} = \mathrm{M}^\alpha\,(\mathrm{L.T}^{-2})^\beta\,\mathrm{L}^\gamma = \mathrm{M}^\alpha\,\mathrm{L}^{\beta+\gamma}\,\mathrm{T}^{-2\beta}\,.$$

Par identification des puissances, on obtient $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. D'où finalement une loi du type

$$\boxed{T_0 = k\sqrt{\frac{R}{g}}}.$$