

# ONDES ET MÉCANIQUE

Exercices IV et V facultatifs.

## CALCULATRICES AUTORISÉES

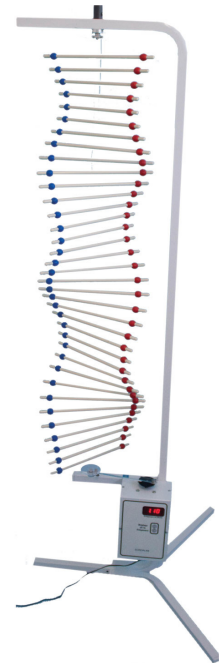
### I. Ondes de torsion sur un ondoscope

Un ondoscope dit « en échelle de perroquet » est constitué de segments métalliques reliés entre eux par un fil vertical et pouvant subir des mouvements de rotation autour de cet axe vertical. On note  $(Ox)$  cette axe vertical, et l'on accepte que la déviation angulaire des segments successifs par rapport à leur position de repos peut être décrit à l'aide d'une fonction d'onde  $\theta(x, t)$  où  $x$  est l'abscisse le long de l'axe  $(Ox)$  et  $t$  le temps. L'axe  $(Ox)$  est orienté vers le haut, son origine  $x = 0$  est située en bas, au niveau de l'excitateur. Les valeurs de  $\theta$  seront décomptées en degrés ( $^\circ$ ).

Un expérimentateur crée une situation d'onde stationnaire sinusoïdale sur cet ondoscope, en imposant à l'extrémité d'abscisse  $x = 0$  un mouvement à la pulsation  $\omega$  :  $\theta(0, t) = A \cos(\omega t)$ . L'extrémité supérieure de l'ondoscope, d'abscisse  $x = L$ , est laissée libre de mouvement. On admet qu'elle va alors présenter un ventre de vibration, c'est à dire un maximum d'amplitude pour les vibrations temporelles, notée  $2\theta_0$  et de valeur  $2\theta_0 = 10^\circ$ .

On rappelle la relation trigonométrique :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$$



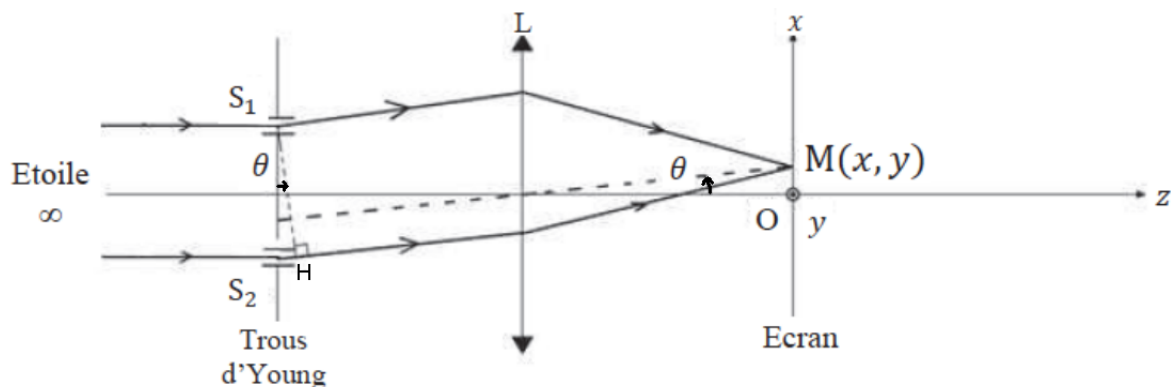
1.
  - a) Donner la forme générale d'une onde stationnaire sinusoïdale  $\theta(x, t)$ .
  - b) En tenant compte de l'existence du ventre en  $x = L$ , préciser l'expression de l'onde stationnaire sinusoïdale  $\theta(x, t)$  en fonction des paramètres  $\theta_0$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $L$ .
  - c) Montrer que cette onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales incidente  $\theta_i(x, t)$  et réfléchi  $\theta_r(x, t)$ , dont on donnera les expressions.
2. L'ondoscope a une longueur totale  $L = 1,10$  m. La fréquence imposée est  $f = 2,0$  Hz.
  - a) On observe que la manipulation conduit à des ondes stationnaires de longueur d'onde  $\lambda = 80$  cm. Calculer la célérité  $c$  des ondes, ainsi que la valeur de  $k$ .
  - b) Exprimer l'amplitude  $A$  qui devra être imposée par l'expérimentateur en  $x = 0$  en fonction de  $\theta_0$ ,  $L$  et  $\lambda$ . Calculer numériquement  $A$ .
  - c) Que peut-on dire du mouvement d'oscillation en l'abscisse  $x = 90$  cm ? Comparer les mouvements observés en les abscisses  $x = 70$  cm et  $x = 110$  cm.
  - d) Tracer l'allure du graphe de  $\theta(x, t_0)$  en fonction de  $x$ , pour  $0 \leq x \leq L = 110$  cm, à l'instant  $t_0$  où le déplacement angulaire  $\theta$  atteint une valeur maximale en l'abscisse  $x = L$ .
3. L'expérimentateur souhaite maintenant obtenir une amplitude maximale pour les oscillations aux abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . Pour obtenir cette situation, il diminue progressivement la fréquence  $f$  imposée aux oscillations à partir de la valeur  $f = 2,0$  Hz. Il relève la valeur de fréquence  $f_0$  immédiatement inférieure à  $f$  pour laquelle la situation voulue est réalisée.
  - a) Tracer une allure de  $\theta(x, t)$  en fonction de  $x$  à un instant  $t$  quelconque, lorsqu'on est à la fréquence  $f_0$ .
  - b) Quelle doit être la valeur de la fréquence  $f_0$  pour atteindre ce comportement ?
  - c) Que se passe-t-il si l'expérimentateur impose une fréquence de valeur  $f_0/2$  ?
  - d) Quelle sera alors l'amplitude de vibration au point  $P$  d'abscisse  $x = 55$  cm ?

## II. Détection d'une exoplanète avec l'interféromètre de Bracewell

Alors que la Terre est actuellement la seule planète connue pour abriter la vie, les astrophysiciens ont découvert une exoplanète bleue, nommée *Isis*. On se propose dans ce problème d'analyser une technique de détection d'exoplanètes faisant appel à l'interférométrie. Comme notre planète, Isis est en orbite autour d'une étoile, ce qui la rend difficile à détecter par une observation directe, car la lumière qui nous parvient d'elle est noyée dans la tâche lumineuse beaucoup plus intense due à l'étoile (à cause de la diffraction notamment).

L'observation du couple étoile-exoplanète est réalisée à une longueur d'onde  $\lambda$  (généralement située dans l'infrarouge), à l'aide d'un dispositif d'interférométrie constitué de deux télescopes distants dont on recombine les faisceaux lumineux pour les faire interférer sur l'image finale.

Dans un premier temps, on considère uniquement l'étoile. On l'assimile à une source d'onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  se propageant suivant l'axe horizontal ( $Oz$ ) à la célérité  $c$ . Perpendiculairement à cet axe, on modélise l'interféromètre par un écran opaque percé de deux trous d'Young écartés d'une distance  $a$ , suivi d'une lentille convergente. On note  $S_1$  et  $S_2$  les centres des deux trous d'Young (voir figure ci-dessous), qui se comportent comme des sources secondaires d'ondes sphériques compte tenu de leur petitesse et de la diffraction qu'ils engendrent. L'observation est effectuée sur un écran situé dans le plan focal de la lentille de focale  $f'$ . On s'intéresse à l'onde lumineuse  $s(M, t)$  en un point  $M(x, y)$  de l'écran<sup>1</sup>, résultant de la superposition des ondes provenant de  $S_1$  et  $S_2$ . On note  $A$  l'amplitude commune de ces deux ondes.



On rappelle que les capteurs optiques sont quadratiques pour la lumière, c'est-à-dire fournissent un signal proportionnel à l'intensité lumineuse moyenne, c'est-à-dire la moyenne du carré du signal :  $I(M, t) = K \langle s^2(M, t) \rangle$ , où  $K$  est une constante sans importance ici.

1. Justifier que le déphasage entre  $S_1$  et  $S_2$  de l'onde plane incidente est nul.

La lentille sert à ramener la figure d'interférence que l'on verrait normalement à l'infini, à distance finie, dans son plan focal. Les rayons qui interfèrent sont donc deux à deux parallèles issus respectivement de  $S_1$  et  $S_2$  (cf figure ci-dessus pour des rayons contenus dans le plan contenant ( $Oz$ ) et ( $S_1S_2$ )). On admet donc que la différence de marche  $\delta(M)$  en  $M$  entre ces deux rayons se calcule comme si les rayons « se coupaient en l'infini » en l'absence de lentille. Autrement dit en valeur absolue  $|\delta| = S_2H$ .

2. Montrer que l'intensité lumineuse en  $M$  s'écrit  $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)\right)$  où  $I_0$  est l'intensité de l'onde émise par  $S_1$  ou par  $S_2$ .
3. En s'appuyant sur le schéma ci-dessus où l'angle  $\theta$  est dans le plan de la feuille (donc  $y = 0$ ), calculer  $\delta(M)$  en fonction de  $\theta$ , puis en fonction de  $x$  et  $f'$  entre autres. On fera l'approximation des petits angles car on suppose les conditions de Gauss vérifiées.
4. On admet que ce calcul est valable si  $y \neq 0^2$ . Autrement dit  $\delta$  est simplement une fonction de  $\theta$ , ou de  $x$ .

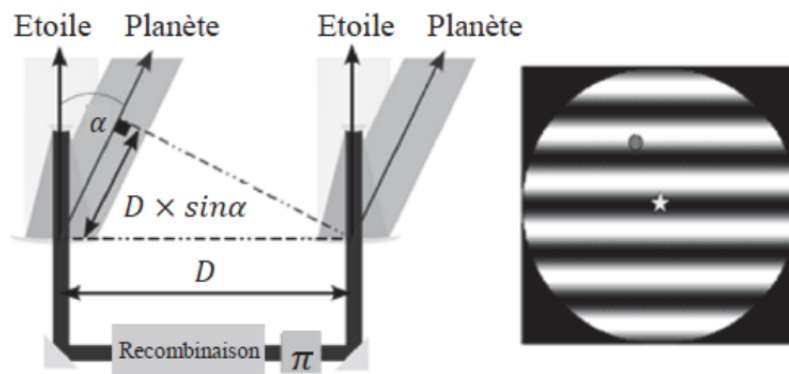
En déduire la forme des franges d'interférence. Déterminer l'interfrange  $i$  (c'est-à-dire la distance entre deux franges brillantes consécutives). Que voit-on en  $x = 0$  ?

1. Ici la fonction d'onde  $s$  représente la composante utile du champ électrique, compte tenu de la polarisation de l'onde.  
2. Cela se comprend par projection orthogonale des rayons dans le plan de la feuille.

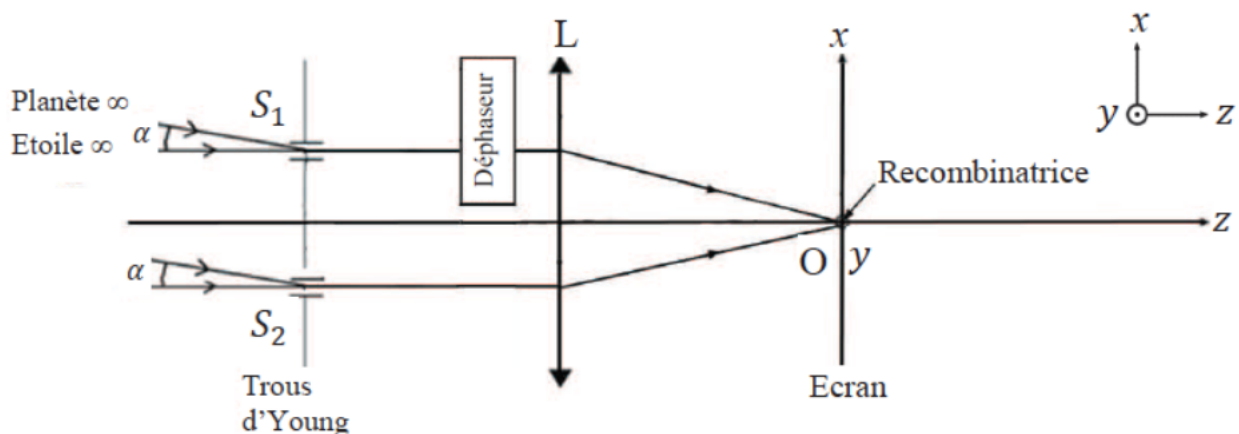
5. Déterminer la valeur du contraste  $\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ .

On considère dans un second temps l'étoile et son exoplanète comme deux sources d'ondes planes monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda$  se propageant suivant l'axe ( $Oz$ ) à la célérité  $c$ , la planète étant éventuellement légèrement excentrée par rapport à l'étoile. Ces deux sources sont *incohérentes*<sup>3</sup> donc n'interfèrent pas entre elles. Par conséquent les deux figures d'interférences respectives dues aux trous d'Young se superposent (on additionne les intensités issues de l'étoile et de la planète). En pratique, si la planète est très proche de l'étoile, la figure donnée par la planète est noyée dans celle de l'étoile qui est très lumineuse au centre.

L'interféromètre de Bracewell propose une méthode pour percevoir la planète qui repose sur l'utilisation de deux télescopes, dont on recombine les faisceaux lumineux après avoir introduit un déphasage de  $\pi$  sur l'un des deux. Cela est illustré sur les deux figures ci-dessous. Dans la figure de droite, l'étoile représente symboliquement le centre de l'image de la vraie étoile, et le point gris excentré est en fait un maximum local de lumière de couleur rouge représentant la position de l'image de la planète.



On peut en comprendre le principe en revenant au modèle des trous d'Young, en introduisant un déphaseur de  $\pi$  sur la première voie, comme indiqué ci-dessous.



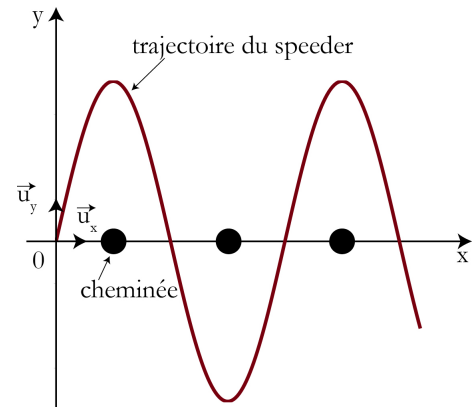
- Dans le cas où la planète n'est pas présente, comment est modifiée la différence de marche  $\delta(x)$  et donc l'intensité trouvée  $I(x)$  trouvée dans l'expérience précédente? Que voit-on maintenant en  $x = 0$ ?
- On s'intéresse maintenant uniquement à l'intensité en provenance de la planète, notée  $I_p(x)$ . Sachant que la planète est dans une direction formant un angle  $\alpha$  par rapport à ( $Oz$ ) (direction de l'étoile), quel est le déphasage de l'onde plane issue de la planète entre  $S_1$  et  $S_2$ ?
- En déduire, toujours pour la lumière issue de la planète, la différence de marche  $\delta_P(x)$  entre deux rayons issus de  $S_1$  et  $S_2$  convergeant sur l'écran en  $x$ .  
À quelle condition sur  $a$  et  $\alpha$  obtient-on maintenant une frange brillante en  $x = 0$ ?
- Expliquer en quoi le dispositif répond au problème posé.

3. Cela signifie que les trains d'ondes issus de chaque source ont des phases à l'origine totalement décorrélées l'une de l'autre.

### III. Pilotage en « speeder »

Dans l'épisode 2 de la Guerre des Étoiles (L'attaque des clones), Anakin SKYWALKER et Obi-Wan KENOBI poursuivent une tueur à gages entre des cheminées d'usine.

On modélise la trajectoire de leur véhicule (« speeder ») par une sinusoïde entre les cheminées, alignées selon l'axe ( $Ox$ ). Les centres des cheminées sont espacés d'une distance  $L = 50$  m. Le centre de la première cheminée est en  $x = L/2$ . Le speeder sera supposé ponctuel et sa position dans le référentiel lié au sol sera repérée par ses coordonnées cartésiennes dans le plan  $Oxy$  de la sinusoïde. On prendra la position initiale du speeder  $y(x = 0) = 0$ . On note  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  les vecteurs unitaires associés aux axes cartésiens ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ). L'amplitude de la sinusoïde de la trajectoire du speeder est  $y_m = 17$  m.



1. Sachant que le speeder passe exactement au milieu de deux cheminées consécutives, précisez la période spatiale  $\lambda$  de la trajectoire du speeder.  
Donner l'expression de la trajectoire  $y(x)$  du véhicule, en fonction de  $L$  et  $y_m$ ,
2. Le speeder conserve une vitesse constante  $v_0$  selon l'axe ( $Ox$ ). Il s'écoule une durée  $t_0 = 6,0$  s entre son départ en  $x = 0$  et le moment où il revient sur l'axe après la sixième cheminée. En déduire l'expression  $x(t)$ . Déterminer la valeur numérique de  $v_0$  en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  puis en  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ .
3. Exprimer la coordonnée  $y$  en fonction du temps  $t$ , puis exprimer le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  du speeder en fonction de  $v_0$ ,  $y_m$  et  $L$ .
4. Déterminer la norme  $v(t)$  de la vitesse du speeder. Quelle est l'expression puis la valeur numérique de sa valeur maximale  $v_{max}$  ? et pour sa valeur minimale  $v_{min}$  ? À quelles positions du speeder ces vitesses maximales et minimales sont-elles atteintes ?
5. Exprimer l'accélération  $\vec{a}(t)$  du speeder.  
Déterminer l'accélération maximale du speeder. Commenter sachant qu'un pilote d'avion de chasse, entraîné, résiste à une accélération de norme maximale  $a_{max} \approx 10g$  avec  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

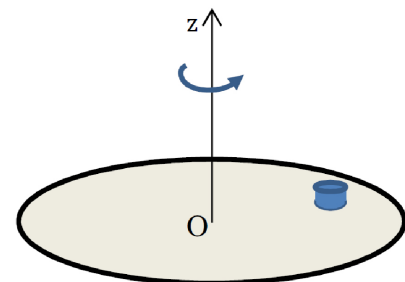
### IV. Limite d'adhérence sur un tourne disque

Un objet en acier  $M$  quasi ponctuel, de masse  $m$ , est posé sur un plateau tournant de rayon  $R = 15$  cm, d'axe vertical ( $Oz$ ), recouvert d'une nappe de caoutchouc. La plateau est entraîné en rotation par un moteur à la vitesse angulaire  $\omega = 33 \text{ tour}\cdot\text{min}^{-1}$  (plateau de tourne-disque). L'objet est à une distance  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) de l'axe du plateau.

L'objectif de cet exercice est de déterminer à partir de quelle valeur du coefficient  $f$  de frottement solide l'objet se met à glisser sur le plateau.

On note  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  l'intensité du champ de pesanteur. On étudie les mouvements dans le référentiel terrestre qu'on supposera galiléen. Les frottements fluides sont négligeables.

**On suppose dans tout l'exercice que l'objet ne glisse pas sur le plateau.**



1. Définir ce qu'est un référentiel galiléen. Justifier qu'il est raisonnable de considérer le référentiel terrestre comme galiléen dans cette expérience.
2. Définir les coordonnées polaires et la base associée, adaptées à l'étude du mouvement de l'objet en acier dans le référentiel terrestre.
3. Exprimer dans cette base polaire les vecteurs position, vitesse et accélération de l'objet en acier correspondants à son mouvement dans le référentiel terrestre.

4. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de la réaction normale  $\vec{N}$  du plateau sur l'objet en acier, ainsi que l'expression de la réaction tangentielle  $\vec{T}$  en fonction de  $m$ ,  $\omega$  et  $r$ .
5. En déduire l'expression littérale puis la valeur numérique du coefficient de frottement limite  $f_{\text{lim}}$  à partir duquel l'objet se mettra à glisser sur le plateau pour une certaine position de l'objet.
6. Le coefficient de frottement de l'acier sur le caoutchouc est de l'ordre de  $f = 0,8$ . L'hypothèse de non-glissement faite au début du problème était-elle correcte ?

## V. Saut record de Félix Baumgartner

Le 14 octobre 2012, le parachutiste autrichien Félix BAUMGARTNER a battu le record du monde de saut en parachute depuis le point le plus haut. <sup>a</sup> Un ballon gonflé à l'hélium l'a hissé jusqu'à l'altitude  $z_0 = 39\,045$  m d'où il s'est laissé tomber vers le sol.

<sup>a</sup>. Vidéo du saut sur Youtube, à regarder chez vous et pas pendant le DS!!!



Le sauteur et son équipement ont une masse  $m \simeq 100$  kg. Lors de sa chute, la vitesse de Félix BAUMGARTNER a dépassé la célérité  $c$  du son dans l'air en atteignant la vitesse record  $v_M = 1\,342,8$  km.h<sup>-1</sup> après 45 secondes de chute ( $c = 301$  m.s<sup>-1</sup> à l'altitude considérée). La chute libre avant déploiement du parachute a duré 4 minutes et 19 secondes pendant lesquelles il a parcouru 36 529 mètres. Lorsque son parachute s'est ouvert, Félix BAUMGARTNER avait atteint sa vitesse dite d'« équilibre » de l'ordre de  $v_0 = 200$  km.h<sup>-1</sup>, et il a terminé son saut qui a duré au total 9 minutes et 3 secondes.

La norme  $g$  du champ de pesanteur varie de moins de 3% sur les distances considérées ici et on prendra  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>. Jusqu'à l'altitude de 100 km, la masse volumique  $\rho$  de l'air à l'altitude  $z$  est bien estimée par la relation  $\rho(z) = \rho_0 e^{-\beta z}$  avec  $\rho_0 = 1,2$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\beta = 1,4 \cdot 10^{-4}$  m<sup>-1</sup>. La force de frottements fluides que subit le sauteur est de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho(z)CS \|\vec{v}\| \vec{v}$$

où  $C \simeq 0,8$  est le coefficient de traînée,  $S \simeq 0,8$  m<sup>2</sup> la surface équivalente du sauteur,  $\vec{v}$  le vecteur vitesse du sauteur et  $\|\vec{v}\|$  sa norme.

On travaillera dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. On considérera que le sauteur n'a qu'un mouvement vertical lors de sa chute. Sa position sera repérée par son altitude  $z$  au-dessus du sol.

1. La vitesse d'un objet dépassant le mur du son est caractérisée par le nombre de Mach, égal au rapport de la vitesse  $v$  de l'objet à celle  $c$  du son. Calculer le nombre de Mach pour le sauteur au moment du record de vitesse.
2. En l'absence complète de résistance de l'air pendant sa chute, quelle aurait été la durée de sa chute libre (pas d'effet du parachute sans résistance de l'air!) ?  
Quelle vitesse le sauteur aurait-il atteinte en arrivant au sol ?
3. Les frottements de l'air ne sont pas négligeables. Exprimer  $\|\vec{v}\|$  en fonction de  $z$  (ne pas utiliser la valeur absolue, mais utiliser les signes si nécessaire).  
Montrer que l'équation différentielle de la chute libre avec frottements peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} - \alpha e^{-\beta z} \dot{z}^2 = -g \quad (1)$$

Préciser l'expression littérale et la valeur de  $\alpha$ .

4. D'après l'équation (1) précédente, le sauteur peut-il atteindre une vitesse limite au cours de son saut ?
5. D'après l'équation (1), exprimer la vitesse maximale  $v_M$  du sauteur en fonction de l'altitude correspondante  $z_M$ . Déduire des données une estimation de l'altitude  $z_M$ .
6. À « basse » altitude, proche de celle où le sauteur a déployé son parachute, la masse volumique de l'air est beaucoup plus grande qu'à très haute altitude. La vitesse du sauteur est alors beaucoup plus faible, donc la masse volumique de l'air varie moins vite au cours du temps et on peut la considérer approximativement égale à  $\rho_0$ . Calculer dans ces conditions de « basse altitude » la vitesse limite théorique du sauteur en chute libre avec frottements et la comparer à la vitesse d'équilibre donnée dans le texte.
7. À quelle altitude  $z_P$  le sauteur déploie-t-il son parachute ?  
Quelle est la durée de la descente en parachute ?  
Pourquoi le parachute permet-il d'atteindre une vitesse suffisamment faible pour atterrir sans encombre ?  
En considérant que la vitesse limite de chute avec parachute est atteinte quasi instantanément, déduire des données la vitesse  $v_{sol}$  avec laquelle le sauteur touche le sol.
8. Sans chercher à respecter les échelles, tracer l'allure de la trajectoire de phase ( $\dot{z}$  en fonction de  $z$ ) du saut. Indiquer les coordonnées (altitude et vitesse) des différents points clés du saut.

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*