FILTRAGE

(d'après ENSTIM 1999)

I. Étude en régime permanent sinusoïdal

1. A haute fréquence, les condensateurs se comportent comme des fils. Donc $V_+ = 0$. Comme $V_+ = V_- = V_S$, il vient que $V_{S,HF} = 0$.
A basse fréquence, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts. Il vient que l'intensité circulant dans les résistances est l'intensité entrant dans la borne + de l'A.O. : elle est donc nulle. Les tensions aux bornes des résistances sont donc nulles et $V_+ = V_E$. Comme $V_+ = V_- = V_S$, il vient $V_S = V_E$.
Il s'agit donc *a priori* d'un filtre passe-bas.

2. On a $V_+ = V_- = V_s$. De plus, les lois des noeuds en terme de potentiel aux points V_A et V_+ s'écrivent :

$$\frac{V_A - V_e}{R} + \frac{V_A - v_S}{\frac{1}{2jC\omega}} + \frac{V_A - V_+}{R} = 0$$
$$\frac{V_+ - V_A}{R} + \frac{V_+ - 0}{\frac{1}{jC\omega}} = 0$$

soit :

$$\left(\frac{2}{R} + j2C\omega\right)V_A - \left(\frac{1}{R} + j2C\omega\right)v_S = \frac{v_E}{R}$$
$$V_A = (1 + jRC\omega)V_S$$

En éliminant V_A, il vient :

$$\left((2 + j2RC\omega)(1 + jRC\omega) - (1 + j2RC\omega)\right) v_S = v_E$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - 2(RC\omega)^2 + j2RC\omega} \qquad (1)$$

Il vient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}$ et $\sigma = RC\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. **a)** $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right)^2 + 4\sigma^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$

b) $\varphi = -arg(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0})$ soit :

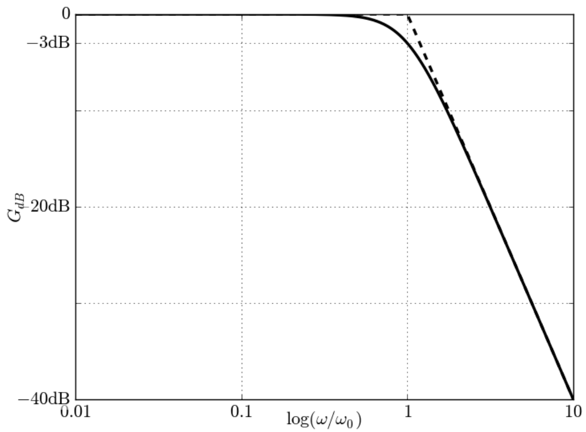
$$\tan\varphi = -\frac{2\sigma\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Remarquons que la partie imaginaire de $arg(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0})$ est toujours positive, donc $arg(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}) \in [0;\pi]$ donc $\varphi \in [-\pi;0]$.

4. $\underline{H}(0) = 1$. On veut donc :

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\sigma^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 2$$
$$(\omega_0^2 - \omega)^2 + 2\omega_0^2\omega^2 \leq 2\omega_0^4$$
$$\Longrightarrow \omega^4 + (4\sigma^2 - 2)\omega_0^2\omega^2 - \omega_0^4 \leq 0$$
$$\Longrightarrow \omega^4 - \omega_0^4 \leq 0$$
$$\Longrightarrow \omega \leq \omega_0$$

5. $G_{dB} = 10\log\left((1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\sigma^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right)$.
A basse fréquence, $G_{dB} \approx 10\log(1) = 0$ soit une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses.
A haute fréquence, $G_{dB} \approx -40\log(\frac{\omega}{\omega_0})$ soit une asymptote oblique de pente -40dB/decade.
Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.



6.

7. $\Delta\omega = \omega_0 = 10^4$rad.s^{-1}

II. Étude du circuit en régime transitoire

8. Chaque terme en $j\omega$ correspond à une dérivée, donc :

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{v_S} = \underline{v_E}$$
$$\omega_0^2 v_S(t) + \frac{d^2v_S}{dt^2}(t) + 2\sigma\omega_0\frac{dv_S}{dt}(t) = \omega_0^2 v_E(t)$$

9. **a)** L'équation précédente est stable et prévoit un régime permanent indépendant du temps tel que : $v_S(t) = v_E(t)$ soit $E = 1$V

b) $\Delta = 4\omega_0^2(\sigma^2 - 1) < 0$ car $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Il s'agit donc d'un régime pseudo-périodique.

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \sigma^2}$$

On accepterait aussi une justification basée sur l'allure de la courbe (dépassement).

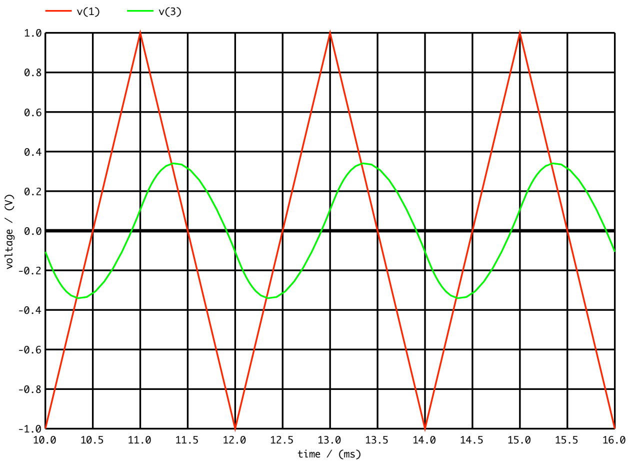
III. Analyse de Fourier

10. On se place dans cette question à $\Omega = \omega_0$ et l'on constate expérimentalement que la tension de sortie v_s est une fonction sinusoïdale du temps.

a) Le gain réel $H(\omega)$ est strictement décroissant donc les harmoniques de rang supérieure sont d'autant plus atténuée. La seule composante d'amplitude encore importante est donc forcément le fondamental. Donc $\omega = \omega_0$.

b) On a : $v_{Sm} = H(\omega_0)\frac{8E_m}{\pi^2} = \frac{8E_m}{\sqrt{2}\pi^2}$ et $\varphi_S = 0 + \varphi(\omega_0) = -\pi/2$ d'où :

$$v_S(t) = \frac{8E_m}{\sqrt{2}\pi^2}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \qquad (2)$$



c)

$v(1)$ correspond à v_E et $v(3)$ correspond à v_S.

On attend ici un tracé sinusoïdal pour $v_S(t)$. Le tracé donné ici est la simulation réelle de la réponse du filtre. On observe que le signal n'est pas en réalité pas tout à fait sinusoïdal, ce qui signifie que les harmoniques de rang supérieures modifie encore un peu l'allure temporelle.

11. Le raisonnement précédent est toujours valable, le fondamental impose encore la pulsation soit :$\Omega = \omega_0$. L'amplitude des harmoniques décroit moins rapidement (en $1/p$ et non en $1/p^2$). Même après le filtre, elles peuvent donc encore modifier l'allure du signal. Pour une harmoniques de rang $2p+1$, le gain réel s'écrit :

$$\underline{H}((2p+1)\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{(1-(2p+1)^2)^2 + 2(2p+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2p+1)^4}}$$

et le déphasage :

$$\varphi = -\pi - \arctan(\frac{\sqrt{2}(2p+1)}{1-(2p+1)^2})$$

Les amplitudes des premières composantes spectrales pour le signal de sortie donnent :

p	Amplitude de sortie	Déphasage
0	$\frac{2E_0}{\sqrt{2}\pi}$	$-pi/2$
1	$\frac{2E_0}{\sqrt{82}\pi}$	$-\pi + \arctan(\frac{3\sqrt{2}}{8})$
2	$\frac{2E_0}{\sqrt{626}\pi}$	$-\pi + \arctan(\frac{5\sqrt{2}}{24})$

On peut donc considérer que les harmoniques après le rang $p = 1$ sont négligeables soit :

$$v_S(t) \approx= \frac{2E_0}{\sqrt{2}\pi}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{2E_0}{\sqrt{82}\pi}\cos(3\omega_0 t - \pi + \arctan(\frac{3\sqrt{2}}{8}))$$