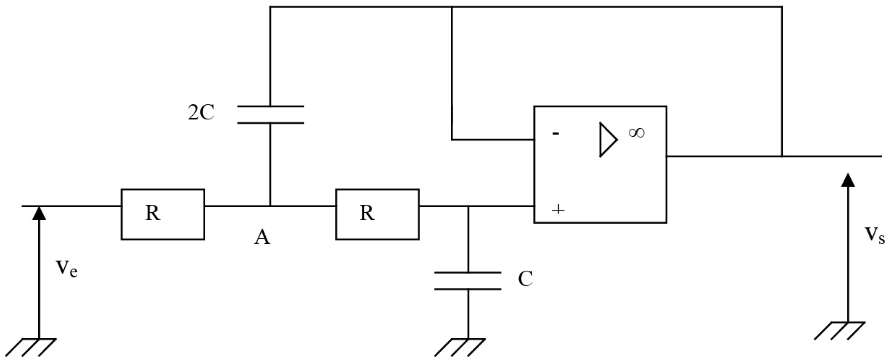
FILTRAGE

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

Le but de ce problème est d'étudier un circuit électronique permettant de filtrer des signaux. On considère le circuit électronique suivant :



Le composant symbolisé par un rectangle à trois bornes est un «Amplificateur Opérationnel» (A.O.), aussi appelé «Amplificateur Linéaire Intégré» (ALI). L'A.O. est considéré idéal (symbole ∞) et fonctionne en régime linéaire. Cela signifie :

- ⋄ d'une part que les courants entrant au niveau des bornes + et − sont toujours nuls,
- ⋄ et d'autre part que les potentiels des bornes + et − d'un même A.O. sont toujours égaux.

On notera aussi qu'un AO délivre un courant en sa sortie (côté droit), mais ce courant n'est pas connu a priori, puisqu'il dépend du reste du circuit. On peut bien sûr le déterminer si besoin à l'aide des lois de Kirchhoff.

I. Étude en régime permanent sinusoïdal

La tension d'entrée est fournie par un générateur basse fréquence et s'écrit $v_e(t) = E_m \cos(\omega t)$ où $E_m > 0$ est la valeur maximale et ω la pulsation de la tension d'entrée. La tension de sortie sera notée $v_s(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ où $V_m > 0$ désigne la valeur maximale de la tension de sortie et φ le déphasage de celle-ci par rapport à la tension d'entrée. L'étude du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe $\underline{v_e}$ et $\underline{v_s}$ pour ces deux tensions (avec $j^2 = -1$) :

$$\begin{cases} \underline{v_e} = E_m e^{j\omega t} \\ \underline{v_s} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

1. Déterminer, de manière qualitative et sans calcul, la nature probable du filtre proposé.

2. Montrer que la fonction de transfert de ce circuit peut s'exprimer sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On exprimera les constantes σ (coefficient d'amortissement du filtre) et ω_0 en fonction de R et C.

3. Déterminer, en fonction de σ et ω_0 :

a) le gain du filtre, noté $H(\omega)$, module de la fonction de transfert. Simplifier son expression compte tenu de la valeur de σ.

b) le déphasage φ, dont on donnera l'expression de $\tan\varphi$ ainsi que son intervalle de variation.

4. Déterminer la bande passante du filtre, définie comme l'intervalle de pulsations pour lequel on a $H(\omega) \geq \frac{H(0)}{\sqrt{2}}$.

5. Donner l'expression du gain exprimé en décibels, noté G_{dB}. Déterminer le comportement asymptotique du gain en décibels G_{dB}, pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$. Justifier la nature du filtre.

6. Tracer le diagramme de Bode en gain (en dB) : diagramme asymptotique et allure du diagramme réel.

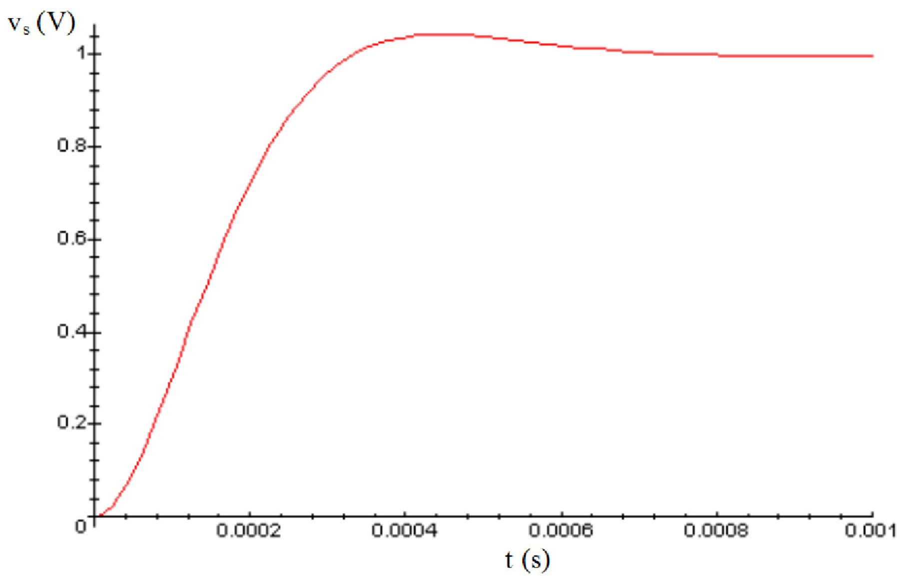
7. A. N. : on donne $C = 1,00\,\mu$F et $R = 100\,\Omega$. Calculer ω_0 ainsi que la bande passante du filtre.

II. Étude du circuit en régime transitoire

La tension d'entrée v_e est désormais quelconque.

8. Déterminer, en utilisant l'expression de la fonction de transfert donnée à la question 2, l'équation différentielle du second ordre qui relie les deux tensions v_e et v_s.

9. On suppose que la tension d'entrée est un échelon de tension, c'est-à-dire que $\mathrm{v}_e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathrm{v}_e(t) = E$ pour $t \geq 0$, où E est une tension constante. La figure ci-dessous, obtenue avec un logiciel de calculs formels, donne la variation de la tension de sortie v_s en fonction du temps. Les valeurs numériques sont les mêmes que celles de la question 7.



a) Quelle est la valeur numérique de la tension E ?

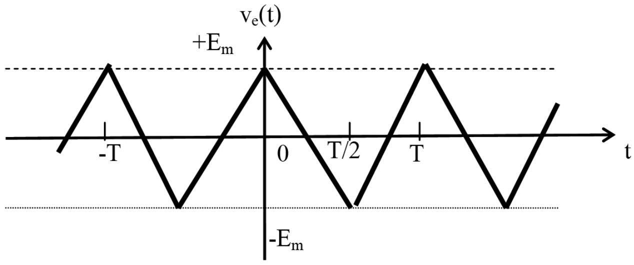
b) Quelle est la nature du régime transitoire observé ? Justifier.
Établir l'expression de la pseudo-pulsation en fonction de ω_0 et σ.

III. Analyse de Fourier

10. La tension d'entrée est désormais une tension triangulaire (voir figure ci-dessous) de pulsation Ω et de période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$\mathrm{v}_e(t) = \frac{8E_m}{\pi^2}\left[\cos\Omega t + \frac{1}{3^2}\cos(3\Omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\Omega t) + ...\right]$$

E_m, valeur maximale de v_e, vaut ici $E_m = 1\,\mathrm{V}$.



On se place dans cette question à $\Omega = \omega_0$ et l'on constate expérimentalement que la tension de sortie v_s est une fonction sinusoïdale du temps.

a) Déterminer la pulsation ω de la tension de sortie.

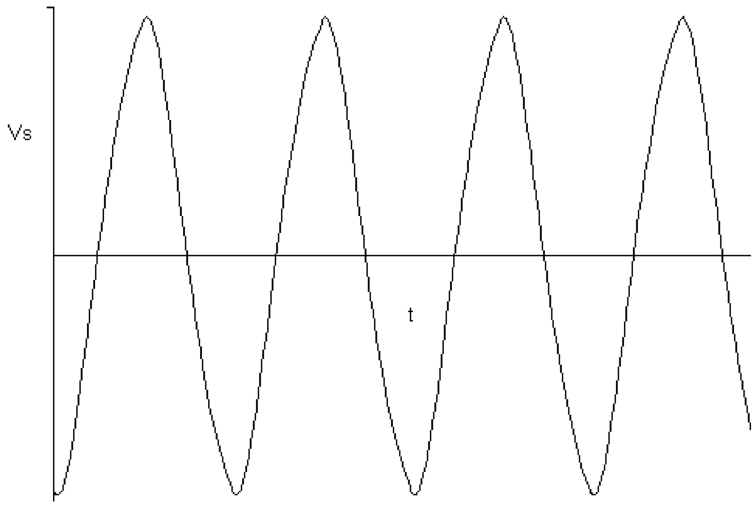
b) Donner l'expression complète de cette tension de sortie sinusoïdale. On déterminera en particulier la valeur maximale de la tension de sortie, ainsi que son déphasage par rapport à l'entrée.

c) Reproduire l'allure de $\mathrm{v}_e(t)$ et tracer sur le même schéma l'allure de la tension de sortie $\mathrm{v}_s(t)$.

11. La tension d'entrée est désormais une tension créneau de pulsation Ω et de période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$\mathrm{v}_e(t) = \frac{2E_0}{\pi}\left[\cos(\Omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\Omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\Omega t) - \frac{1}{7}\cos(7\Omega t) + ...\right] = \frac{2E_0}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\cos((2p+1)\Omega t)}{2p+1}$$

Quand $\Omega = \omega_0$, on constate expérimentalement que la tension de sortie v_s est presque une fonction sinusoïdale du temps (voir figure ci-dessous).



Quelle est la période du signal de sortie ? Expliquez pourquoi la tension $\mathrm{v}_s(t)$ n'est pas tout à fait sinusoïdale. Montrer que $\mathrm{v}_s(t)$ peut s'écrire avec une bonne approximation comme la somme de deux sinusoïdes que l'on déterminera.

* * * Fin de l'épreuve * * *