ÉLECTRICITÉ

d'après Banque PT 2015

I. Extraction du signal de position d'un capteur à condensateur double

1. $\boxed{\underline{u} = U\, e^{j(\omega t+\varphi)}}$, avec $j^2=-1$. On pose $\boxed{\underline{U} = U\, e^{j\varphi}}$.

2. Les condensateurs sont en série et les résistances aussi, donc on peut appliquer la relation du pont diviseur de tension pour chacune des branches :

$$\underline{u} = \underline{e}\left(\frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}} - \frac{R}{R+R}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{U} = E\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{1}{2}\right) = E\left(\frac{1}{2}-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right) = \frac{E}{2}\,\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}}.$$

3. On en déduit $\underline{U} = E\,\frac{x}{L}$. D'où $\boxed{U = E\,\frac{|x|}{L}}$.

4. On obtient $\boxed{\sigma_U = \frac{E}{L}}$. Cette sensibilité est indépendante de x, donc cela permet d'avoir une amplitude de signal de tension qui **reproduit fidèlement** (linéairement) l'amplitude du mouvement oscillatoire capté.

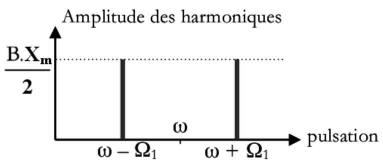
5. On a $\varphi = \arg(\underline{U})$ donc $\boxed{\varphi = \arg(x)} = \underline{0 \quad \text{si} \quad x>0 \text{ ou } \pi\ [2\pi] \quad \text{si} \quad x<0}$.
Ainsi, **l'argument indique de façon binaire le signe de** x.

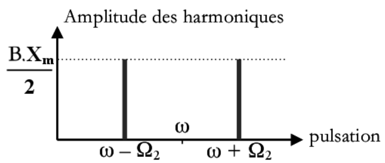
II. Analyse des signaux par oscilloscope

6. On a donc $\Omega_i \ll \omega$ (avec $i=1,2$). On linéarise le produit :

a) $\boxed{u(t) = \frac{BX_m}{2}\left(\cos((\omega-\Omega_1)t)+\cos((\omega+\Omega_1)t)\right)}$ et *b)* $\boxed{u(t) = \frac{BX_m}{2}\left(\cos((\omega-\Omega_2)t+\pi)+\cos((\omega+\Omega_2)t+\pi)\right)}$

Les deux spectres en amplitude sont identiques :



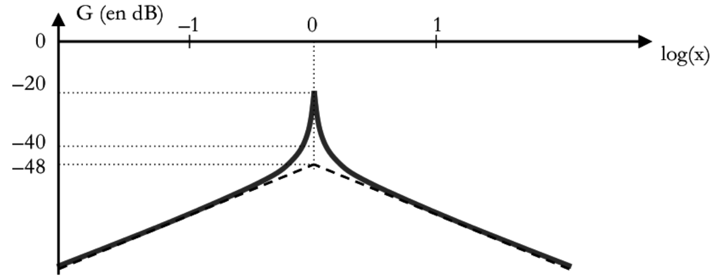


7. Fréquence « électrique » :
On compte environ 40 périodes rapides en 0,1 s donc $f_e = \frac{40}{0,1} = \underline{400\,\mathrm{Hz}}$.
Fréquences mécaniques :
En a) on observe une période pendant 0,1 s donc $T_{m1} = 0,1\,\mathrm{s}$ et $f_{m1} = \frac{1}{0,1} = \underline{10\,\mathrm{Hz}}$.
En b) on observe à peu près 2,5 périodes pendant 0,1 s donc $T_{m2} = 0,04\,\mathrm{s}$ et $f_{m2} = \frac{2,5}{0,1} = \underline{25\,\mathrm{Hz}}$.

8. On en déduit $\boxed{\Omega_1 = 2\pi\, f_{m1}} = \underline{62\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$, et $\boxed{\Omega_2 = 2\pi\, f_{m2}} = \underline{1,6\times10^2\,\mathrm{rad.s^{-1}}}$.

III. Conditionnement des signaux par oscillateur

9. a) $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to0}{\sim} 20\,\log\frac{A_0}{Q} + 20\log x}$ et $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to\infty}{\sim} 20\,\log\frac{A_0}{Q} - 20\log x}$.



b)

c) Il s'agit d'un filtre <u>passe-bande</u>. Le gain $G(x) = \frac{A_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$ est maximal pour $x=1$ donc il s'agit d'une <u>résonance en $x=1$</u>. On a $\underline{H}(x=1) = A_0 > 0$ donc <u>u_1 et u_2 sont en phase, le déphasage est nul</u>.

d) Soient x_1 et x_2 les fréquences (réduites) de coupure, avec $x_2 > x_1$. Elles vérifient $G(x_{1,2}) = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$ donc

$$Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q\left(x-\frac{1}{x}\right) = \pm1 \Leftrightarrow x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_{1,2} = \mp\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}}.$$

On en déduit la largeur de la bande passante : $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}} = \underline{4,0\times10^{-2}}$.

e) Par le pont diviseur de tension nous obtenir en Régime Sinusoïdal Forcé (RSF) :

$$\underline{H} = \frac{1}{1+R_0\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)} = \frac{1}{1+\frac{R_0}{R}+jR_0\sqrt{\frac{C}{L}}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{A_0}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad , \quad \boxed{A_0 = \frac{R}{R+R_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\frac{C}{L}}}.$$

10. a) Comme $i_- = 0$, les résistances R_1 et R_2 sont en série. Le potentiel $\underline{v_-}$ s'obtient donc par le pont diviseur de tension. Comme $\underline{u_2} = \underline{v_+} = \underline{v_-} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,\underline{u_3}$, donc $\boxed{\underline{G} = \frac{\underline{u_3}}{\underline{u_2}} = 1+\frac{R_2}{R_1}}$.

b) Comme la fonction de transfert est réelle et positive, on obtient $\boxed{K = |\underline{G}| = \underline{G} = 1+\frac{R_2}{R_1}}$.

11. a) En RSF, on obtient $\underline{u_3} = K\underline{u_2} = K\underline{H}\,\underline{u_1} = K\underline{H}\,\underline{u_3}$ d'où

$$\left(jx + Q(jx)^2 + Q\right)\underline{u_3} = KA_0\, jx\, \underline{u_3} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1-KA_0}{\omega_0 Q}\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + u_3 = 0}.$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre. L'oscillateur se trouve en régime harmonique si le terme d'ordre 1 est nul, c'est-à-dire si $\boxed{KA_0 = 1}$: $\ddot{u}_3 + \omega_0^2\, u_3 = 0$. La pulsation des oscillations est ω_0, donc $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$.
Remarque : on retrouve ce critère sur l'équation en complexe ci-dessus après simplification par $\underline{u_3}$.

12. a) $f_{\mathrm{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C_0\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}} \approx \frac{D}{\sqrt{C_0}}\left(1+\frac{x}{2\ell}\right)$ d'où $\boxed{f_{\mathrm{osc}} = ax+b}$ avec $\boxed{a = \frac{f_{\mathrm{or}}}{2\ell}}$ et $\boxed{b = f_{\mathrm{or}} = \frac{D}{\sqrt{C_0}}}$.

b) D'où $\Delta f = f_{\mathrm{osc}} - f_{\mathrm{or}} = \frac{f_{\mathrm{or}}}{2\ell}\,x$ et donc $\boxed{x_{\min} = \frac{2\ell\Delta f_{\min}}{f_{\mathrm{or}}}} = \underline{1,9\times10^{-4}\,\mathrm{m} \approx 0,2\,\mathrm{mm}}$.