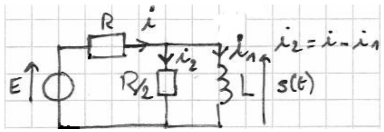
Comparaison de deux circuits en régime variable

I. Circuit RL en régime transitoire

1. À l'instant $t = 0^-$, le circuit est en régime stationnaire avec k ouvert. La bobine est équivalente à un fil et donc $\boxed{s(0^-) = 0}$. Elle n'est parcourue par aucun courant donc $i_1(0) = 0$ (doit être continu). Ainsi $i_2(0^-) = i(0^-)$ et de même $i_2(0^+) = i(0^+)$.



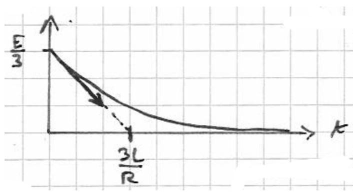
Ceci conduit à $\boxed{i(0^-) = 0}$, et $i(0^+) = \frac{E}{R+R/2}$ donc $\boxed{i(0^+) = \dfrac{2E}{3R}}$ et $\boxed{s(0^+) = \frac{R}{2}\, i_2(0^+) = \dfrac{E}{3}}$. On constate donc que s **et** i **ne sont pas continues en** $t = 0$.

2. Le circuit tend vers un régime permanent stationnaire, donc la bobine sera équivalente à un fil, et $\boxed{s(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$.

3. La petite maille donne $s = \frac{R}{2} i_2$, et de plus $s = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$. Donc on peut remplacer tous les courants en fonction de s dans la seconde maille. Pour $t > 0$ on a

$$E = R(i_1 + i_2) + \tfrac{R}{2} i_2 = Ri_1 + \tfrac{3R}{2} i_2 \quad \text{d'où en dérivant} \quad 0 = \tfrac{R}{L} s + 3\dot{s} \Leftrightarrow \boxed{\tau\dot{s} + s = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \tfrac{3L}{R}}.$$

4. D'où $s(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\lambda = s(0^+)$, ce qui donne $\boxed{s(t) = \dfrac{E}{3}\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{3L}{R}}$.



5. $s(t_0) = \frac{E}{3} \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{t_0 = \dfrac{3L}{R}\, \ln 10}$.

6. $\boxed{L = \dfrac{Rt_0}{3 \ln 10}} = \underline{4,3 \times 10^{-4}\ \text{H}}$.

II. Un circuit plus complexe en régime transitoire

7. On part des grandeurs qui doivent rester continues : i_1 et i_4. A $t = 0^-$ on est en régime stationnaire donc les bobines équivalent à des fils, et donc $i_2(0^-) = i_4(0) = 0$ et $i(0^-) = i_1(0) = i_3(0^-)$. La loi des mailles en passant par les résistances donne $E = 2Ri_1(0)$ donc $i_1(0) = \frac{E}{2R}$.
A $t = 0^+$ on a toujours $i_3(0^+) = i(0^+)$ car $i_4(0) = 0$, donc la loi des mailles en passant par les résistances donne $E = R(i(0^+) + i(0^+) - i_1(0) + i(0^+)) = 3Ri(0^+) - \frac{E}{2}$, d'où $i(0^+) = \frac{E}{2R}$.
Finalement on a $\boxed{i(0^+) = i_1(0) = i_3(0^+) = \dfrac{E}{2R}}$ et $\boxed{i_2(0^+) = i_4(0) = 0}$. Et comme $s = Ri_3$, on a $\boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{2}}$.

8. En régime stationnaire, les bobines sont assimilées à des fils, qui court-circuitent donc les résistances associées : $\boxed{i_2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$, $\boxed{i_3 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$ et $\boxed{s = Ri_3 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$. Par conséquent $E = Ri$, d'où $\boxed{\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty} i_1 = \lim_{t\to\infty} i_4 = \dfrac{E}{R}}$.

9. **a)** Comme $i_2 = i - i_1$ et $i_3 = i - i_4$, on obtient avec les 2 petites mailles puis en passant par les résistances :

$$i = i_1 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$$i = i_4 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$\frac{E}{R} = 3i - i_1 - i_4 \tag{3}$$

b) En formant la combinaison d'équations 3(2)+(3) on obtient

$$\frac{E}{R} = 2i_4 + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} - i_1\,. \tag{4}$$

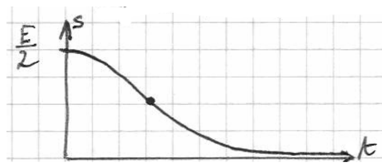
Pour éliminer i_1, on réalise alors la combinaison (4) + $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$(4) + (1) - (2), ce qui donne

$$\frac{E}{R} = i_4 + 4\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} + 3\frac{L^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}^2 i_4}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{5}$$

Comme $s = L\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t}$, on redérive cette équation pour obtenir sous forme canonique

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{s} + \omega_0^2\, s = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{R}{\sqrt{3}L}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{3}}{4}} \approx \underline{0,4}\,.$$

10. L'équation différentielle est sans second membre donc sans solution particulière. Comme $Q < \frac{1}{2}$, on est en présence d'un régime apériodique. En effet le discriminent de l'équation caractéristique vaut $\Delta = \frac{R^2}{L^2} > 0$, d'où les racines $r_+ = -\frac{R}{L}$ et $r_- = -\frac{R}{3L}$, et la forme générale de la solution : $\boxed{s(t) = \lambda\, e^{-\frac{Rt}{L}} + \mu\, e^{-\frac{Rt}{3L}}}$.



11. **a)** En notant que $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i_4}{\mathrm{d}t^2}$, on voit que l'Eq. (5) permet de conclure : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{RE}{3L} - \frac{R^2}{3L} i_4(0) - \frac{4R}{3L} s(0^+)$ d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{RE}{3L}}$.

b) On obtient le système suivant

$$\begin{cases} s(0^+) = \frac{E}{2} &= \lambda + \mu \\ \frac{3L}{R}\dot{s}(0^+) = E &= -3\lambda - \mu \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3E}{4} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{E}{4}\,.$$

Finalement on obtient $\boxed{s(t) = -\dfrac{E}{4}\left(3\, e^{-\frac{Rt}{L}} + e^{-\frac{Rt}{3L}}\right)}$.