

MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

Les trois parties sont indépendantes. Le 3ème problème est facultatif

I. Ascension atmosphérique en montgolfière

Les vecteurs sont notés en caractères gras, et leur norme en italique : Le vecteur \mathbf{v} a pour norme v . Les valeurs des constantes physiques utiles dans les applications numériques sont données à la fin du texte.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme g , est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz , et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical.

Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R . La masse molaire moyenne de l'air est notée M_e , sa pression P , sa température T et sa masse volumique μ . On désigne par P_o , T_o et μ_o les valeurs de P , T et μ au niveau du sol (où $z = 0$).

I.1. Atmosphère en équilibre

a. Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme T_o . On prendra $T_o = 288$ K.

1. Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de P , R , T_o et M_e .
2. Ecrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_o , de la hauteur barométrique $H = RT_o/(M_e g)$ et de l'altitude z .
3. En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en O_2 et de 80% en N_2 , calculer la valeur numérique de H . A quelle altitude $z_{50\%}^{iso}$ la pression est elle égale à $P_o/2$?

b. Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type $T = T_0(1 - \alpha z)$ où $\alpha = 1/z_0$ est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en z/z_0 d'une expression plus précise. La valeur expérimentale $z_0 \simeq 33$ km justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

4. Montrer que l'on peut écrire $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta$ et $\mu(z) = \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$ où l'on donnera l'expression de β en fonction de H et de z_0 .
5. À quelle altitude $z_{50\%}^{pol}$ la pression est-elle égale à $P_0/2$? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 3. Ce résultat était-il prévisible?
6. Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les figures 1,2 et 3. La pression est donnée en 10^5 Pa, la température en K, la densité en $kg.m^{-3}$ et l'altitude en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d'obtenir les relations :

$$T = 288,14 - 6,94z$$

$$P = 1,01(T/288,08)^{5,26}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?

Dans toute la suite du problème, on utilisera des valeurs numériques suivantes : $T_0 = 288$ K, $P_0 = 1013$ hPa, $\beta = 5$ et $z_0 = 40$ km, soit $\alpha = 2,5 \times 10^{-5} m^{-1}$.

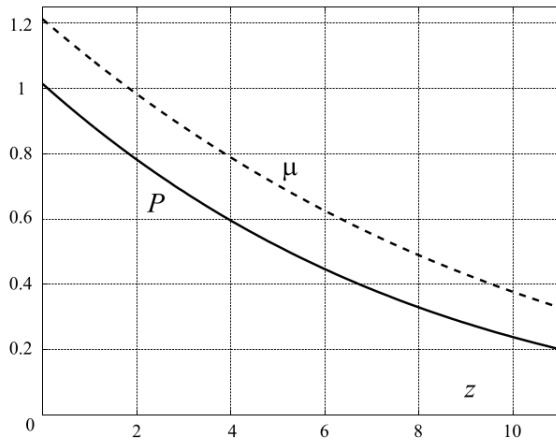


Figure 1

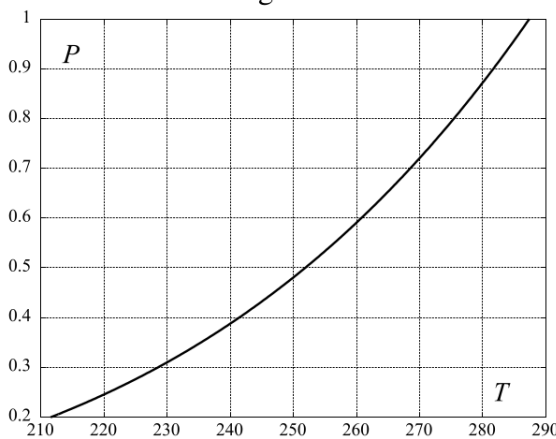


Figure 3

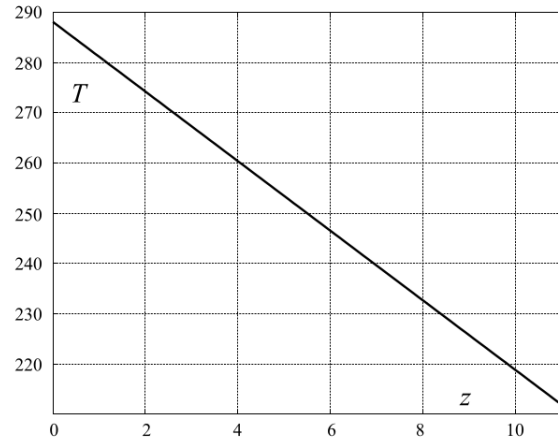


Figure 2

1.2. Equilibre d'une montgolfière

Une montgolfière standard reste à des altitudes raisonnables pour des questions évidentes de raréfaction en dioxygène. Le modèle polytropique des basses altitudes est donc bien adapté pour décrire son environnement atmosphérique, nous l'utiliserons désormais.

La pression, la masse volumique et la température de l'atmosphère à l'altitude z seront notées respectivement P_e , μ_e et T_e . La montgolfière est constituée d'une enveloppe ouverte de volume intérieur $V_0 = 2000 \text{ m}^3$ et d'une nacelle (voir Fig. 4). La masse totale de l'enveloppe, de la nacelle et des passagers est notée m . On prendra $m = 500 \text{ kg}$; le volume propre de ces différents éléments est négligeable. Le volume intérieur à l'enveloppe est constant, mais la masse m_i de l'air chaud emprisonné à l'intérieur de cette enveloppe est variable. La masse de l'ensemble est donc $m + m_i$. On suppose qu'à l'intérieur de l'enveloppe, la température T_i et la pression P_i sont uniformes. L'ouverture inférieure de l'enveloppe permet de réaliser en permanence l'équilibre de pression entre l'air froid extérieur et l'air chaud intérieur. On suppose enfin que les gaz de combustion n'affectent pas la masse molaire M_e .

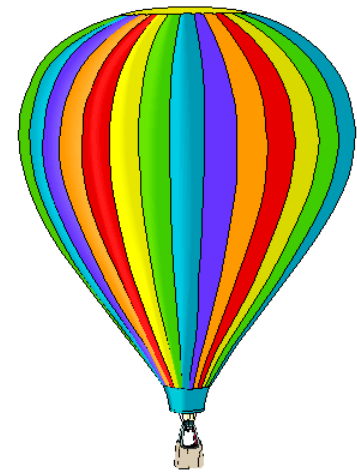


Figure 4 - La montgolfière

7. Exprimer la masse m_i de l'air chaud dans l'enveloppe en fonction de P_e , V_0 , M_e , et RT_i puis en fonction de μ_e , V_0 , T_e , et T_i .
8. À l'équilibre mécanique, la poussée d'Archimède compense le poids de la montgolfière et de l'air chaud qu'elle contient. Trouver la relation qui permet alors d'exprimer m en fonction de m_i , T_e et T_i .
9. On note z_m l'altitude où la poussée d'Archimède exercée par l'air compense le poids mg . Exprimer z_m en fonction de α , β , m , μ_0 et V_0 . Calculer la valeur numérique de z_m .
10. On note T_d la valeur minimale de la température T_i permettant le décollage de la montgolfière. Etablir la relation, très simple, liant $m/(\mu_0 V_0)$ à $1 - T_o/T_i$. Calculer la valeur numérique de T_d .

11. Etablir la condition d'équilibre de la montgolfière :

$$P_e \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) = \kappa_1 \left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_d} \right) \quad (1)$$

où κ_1 est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème. En déduire la relation, notée $[E_1]$ donnant à l'équilibre $\delta T_i/T_i$ en fonction de $\delta T_e/T_e$, $\delta P_e/P_e$ et de T_i/T_e .

12. En utilisant les grandeurs réduites $Z = \alpha z$, $Z_m = \alpha z_m$ et $\theta_i = T_i/T_o$, montrer que la condition d'équilibre de la question 8 s'écrit :

$$(1 - Z)^{\beta-1} = \frac{m}{\mu_o V_o} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i}$$

en utilisant à présent l'expression de z_m obtenue à la question 9, déduire l'expression de la fonction $Z \mapsto \theta_i(Z)$ en fonction des paramètres β et Z_m . On admet que le signe de $\theta'_i(0) = \left. \frac{d\theta_i}{dZ} \right|_{Z=0}$ est le même que celui de $\frac{\beta m}{\mu_o V_o} - 1$. Tracer rapidement l'allure de la courbe représentative de $\theta_i(Z)$ selon les valeurs de $\beta m/(\mu_o V_o)$. En considérant la phase de descente, expliquer pourquoi une montgolfière satisfaisant la condition $\beta m/(\mu_o V_o)$ fait courir le risque d'un écrasement au sol.

13. Calculer la valeur numérique V_{max} du volume de l'enveloppe permettant de satisfaire la condition $\theta'_i(0) > 0$. Pour une valeur $T_{max} = 373$ K de la température maximale acceptable pour une montgolfière, calculer la valeur minimale V_{min} du volume de l'enveloppe qui permet le décollage. Calculer les valeurs de z_m associées à V_{min} et V_{max} .

Valeurs numériques utiles

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$,

Accélération de la gravité à la surface de la Terre : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Masse atomique de l'oxygène : $M_O = 16 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

Masse atomique de l'azote : $M_N = 14 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

II. Equivalent mésoscopique de l'équilibre liquide vapeur

L'humain a tendance à vouloir tout voir. Or comble de malchance, il ne peut voir les phénomènes à toute petite échelle. Dans le cas qui nous intéresse, l'expérimentateur aussi bon soit-il ne pourra pas visualiser directement l'interface eau-vapeur d'eau qui présente des motifs de l'ordre de l'angstrom. Peu importe, il en construira un équivalent qu'il peut voir. C'est ce qu'ont réalisé les chercheurs Aarts, Schmidt et Lekkerkerker expérimentalement et qui a donné lieu à de très belles expériences.



FIGURE 1 – Photographie d'une interface colloïdale tiré de l'article, l'équivalent du liquide est coloré et situé en bas ; l'équivalent du gaz est plus sombre et situé en haut.

Ce problème vise à comprendre comment les chercheurs ont réalisé l'équivalent à plus grande échelle de l'équilibre eau-vapeur d'eau.

1. Rappeler pourquoi il n'est pas possible de visualiser directement l'interface eau-vapeur d'eau qui présente des irrégularités de l'ordre de l'angstrom.
2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle d'interaction $E_{int}(r)$ entre deux briques quelconques de taille a . Interpréter ce qui se passe lorsque la distance r entre les deux briques est très petite. Préciser si cela correspond à une répulsion ou à une attraction. Même question lorsque la distance r est de l'ordre de quelques a .

Pour obtenir l'équivalent mésoscopique de l'interface liquide-vapeur, les chercheurs ont simplement changé la taille des briques élémentaires. Ils ont travaillé avec ce qu'on appelle des colloïdes, qu'on considèrera ici comme des sphères dures de rayon $R_b = 70$ nm. Ces colloïdes sont immergés dans un solvant, qui a pour rôle d'éviter que les colloïdes ne "tombent" et a été choisi afin de n'induire aucune interaction supplémentaire par rapport à celles présentées dans la suite. On suppose la distribution des colloïdes homogène dans le solvant.

On notera k_B la constante de Boltzmann, et T la température de la solution colloïdale.

II.1. La répulsion : modèle de sphères dures

3. A l'aide d'un schéma, montrer qu'une distance intercolloïde D inférieure à $2R_b$ est impossible si les colloïdes sont des sphères dures. En partant de colloïdes légèrement déformables et de l'interprétation physique de l'énergie potentielle d'interaction, justifier que l'énergie potentielle d'interaction $E_{int}(D)$ est prise comme étant infinie pour $D < 2R_b$.

II.2. L'attraction : interaction de déplétion

Pour introduire une interaction attractive entre les colloïdes, les chercheurs ont rajouté de plus petits colloïdes, considérés comme des sphères de taille r_s . On supposera que ces petits colloïdes se comportent comme un gaz parfait autour des plus gros colloïdes, qui tiennent alors le rôle de parois.

4. Schématiser le plus simplement possible la situation.
5. En considérant le gros colloïde comme une paroi plane du point de vue des chocs petits colloïdes-gros colloïdes, déterminer la pression P_s exercée par les petits colloïdes dans l'hypothèse de l'équilibre statistique simplifiée des vitesses. On notera m_s la masse des petits colloïdes, u_s leur vitesse quadratique moyenne et n_s^* leur densité particulière.
6. Schématiser un gros colloïde, avec un deuxième très loin. Justifier par un raisonnement sur les symétries que la présence du deuxième colloïde ne modifie pas le comportement du premier en raisonnant sur l'action des petits colloïdes sur le premier.
7. On dira alors que la force d'interaction du deuxième colloïde sur le premier est nulle. Comment choisir alors la valeur constante de l'énergie potentielle $E_{int}(D)$ d'interaction ? On supposera que la valeur de ce potentiel d'interaction est valable dès que $D \geq 2R_b + 2r_s$.
8. Considérons le 3ème et dernier cas lorsque $2R_b \leq D \leq 2R_b + 2r_s$.
Notons l'axe (Oz) l'axe reliant les centres des deux gros colloïdes avec O le centre du premier colloïde. Associons à cet axe un repère sphérique avec les coordonnées (r, θ, φ) . Le colloïde correspond à la sphère d'équation $r = R_b$. En prenant en compte la taille finie $2r_s$ des petits colloïdes, expliquer que les petits colloïdes ne peuvent entrer en collision avec le gros colloïde que si le lieu de la collision vérifie $\theta > \alpha$. Déterminer α .
9. Récapituler les valeurs de θ et de φ décrivant les lieux possibles de collision sur le gros colloïde.
10. Rappeler l'élément de surface $d^2\vec{S}$ correspondant à une variation d'angle θ de $d\theta$ et à une variation d'angle φ de $d\varphi$. Quelle est alors la force $d^2\vec{F}_{pression}$ de surface appliquée par les petits colloïdes sur cet élément de surface ?
11. A-t-on la totalité de la force $d^2\vec{F}_{pression}$ qui contribue à la force de pression finale $\vec{F}_{pression}$?
12. Déterminer l'expression de $\vec{F}_{pression}$ en fonction de n_s^* , m_s , u_s , R_b et α , puis en fonction de n_s^* , k_B , T , R_b , R_s , et D .
13. Cette force $\vec{F}_{pression}$, même si elle n'est pas due directement au deuxième gros colloïde, est induite par sa présence. On peut donc la considérer comme une force d'interaction du deuxième colloïde sur le premier.
Comme elle est due à l'absence de petits colloïdes dans un volume qualifié de "volume exclu", on la nomme "force de déplétion" ou "interaction de déplétion".
En déduire à une constante près l'énergie potentielle d'interaction $E_{int}(D)$ pour $2R_b \leq D \leq 2R_b + 2r_s$.
14. Déterminer la constante d'intégration par la condition de continuité de $E_{int}(D)$ en $D = 2R_b + 2r_s$.

15. Tracer l'allure de la fonction $E_{int}(D)$.
16. En déduire une valeur caractéristique de $E_{int}(D)$.
17. La transition liquide vapeur se réalise lorsque l'énergie potentielle d'une brique devient de l'ordre de grandeur de son énergie cinétique. Pour déterminer une valeur typique de l'énergie cinétique des gros colloïdes, on suppose que les gros colloïdes forment un gaz parfait.
En déduire un ordre de grandeur de n_s^* à l'équilibre liquide colloïdal-gaz colloïdal.
18. L'équilibre liquide-vapeur colloïdal dépend-il de la température? Est-ce un avantage?
19. Dans l'article, les chercheurs indiquent la fraction volumique de petits colloïdes, ϕ_s , en fonction de la fraction volumique des gros colloïdes. On lit que ϕ_s est de l'ordre de 0.5 – 0.6. Est-ce cohérent avec le modèle simple présenté ci-dessus.
20. Question supplémentaire : l'interprétation de l'expérience reste relativement simple. Expérimentalement, il a fallu de l'ingéniosité pour choisir le bon solvant et les natures adéquates des colloïdes afin de limiter quelles interactions?

III. Rotation à vitesse angulaire variable

Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M , de longueur D et de rayon très petit devant D . Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit ; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (O, x, y) . On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale. On étudie le mouvement de la cheminée dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen, en projection sur la base mobile de coordonnées polaires \hat{u} , \hat{v} , où \hat{u} est porté par l'axe de la cheminée, \hat{v} est perpendiculaire à \hat{u} dans le sens de rotation de l'angle θ et G est le centre de masse de la cheminée. Les moments d'inertie en G autour de l'axe Gz et en O autour de l'axe Oz sont respectivement $J_G = \frac{1}{12}MD^2$ et $J_O = \frac{1}{3}MD^2$. La liaison pivot en O est parfaite.

1. Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en O , l'équation d'évolution de l'angle θ .
2. Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.
3. Exprimer, en fonction de l'angle θ , les composantes R_u et R_v de la réaction du sol en O en projection sur \hat{u} et sur \hat{v} .
4. Pour quelle valeur de θ la cheminée décolle-t-elle du sol?

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O , l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en P . Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en P n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force \vec{S} de composantes S_u et S_v et un couple \vec{C} porté par l'axe horizontal Oz .

5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur d de cheminée, exprimer S_v en fonction de M , g , θ , d et D . La grandeur S_v est appelée *effort de cisaillement*. Tracer qualitativement le graphe donnant S_v en fonction du rapport $\frac{d}{D}$ (θ est donné).

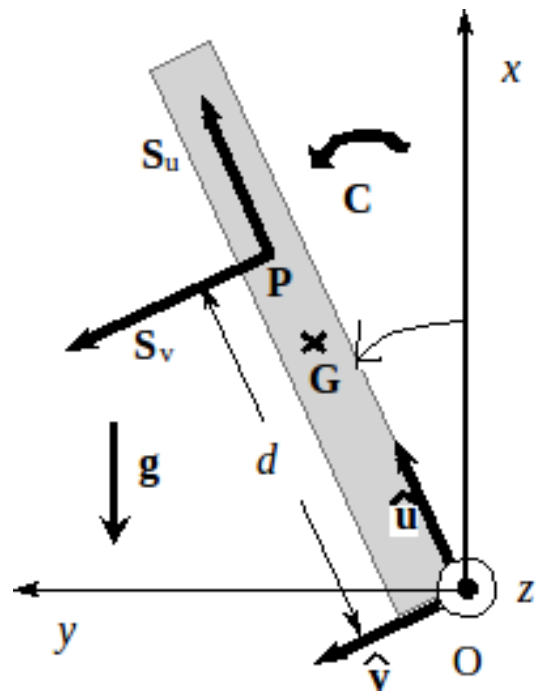


FIGURE 2 – La cheminée s'écroule



6. Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement S_v est le plus important ; quel est ce point ?
7. Montrer que le théorème du moment cinétique en O , appliqué à la longueur d de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté C) du couple \vec{C} :

$$C = -\frac{1}{4}Mgd \left(\frac{d}{D} - 1 \right)^2 \sin \theta.$$

8. Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *