

CB 2 de PHYSIQUE - CORRECTION

1 Cycle moteur

1. À l'aide de la relation de Mayer et de l'équation d'état des gaz parfaits dans l'état 0 ($P_0V_A = nRT_0$) on

obtient :
$$C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} = \frac{\gamma P_0V_A}{T_0(\gamma - 1)} \quad \text{et} \quad C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} = \frac{P_0V_A}{T_0(\gamma - 1)}$$

2. Le gaz parfait subit une transformation isochore quasi-statique entre 0 et 1.

3. Pour calculer P_1 , on écrit l'équilibre du piston, de masse négligeable. Bilan des forces (le vecteur \vec{u}_z est unitaire vertical ascendant) : poids de la masse $-mg\vec{u}_z$; $\vec{F}_{\text{atm} \rightarrow \text{piston}} = -P_0S\vec{u}_z$; $\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow \text{piston}} = P_1S\vec{u}_z$; on obtient $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$. AN : $P_1 = 1,1 \text{ bar}$.

Le gaz dans le piston constituant un système fermé subissant une transformation isochore, la quantité nR/V_A est constante. L'équation d'état donne donc $\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_1}{T_1}$, d'où $T_1 = \frac{P_1}{P_0}T_0$. On obtient donc :

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{mg}{P_0S} \right)$$
. AN : $T_1 = 330 \text{ K}$.

4. Appliquons le premier principe au système {gaz dans l'enceinte}. La transformation étant isochore, le travail reçu par le gaz est nul. On obtient $\delta Q_0^1 = dU = C_v dT$. Or C_v étant constant (puisque γ est constant) alors :

$$Q_0^1 = C_v(T_1 - T_0) = \frac{P_0V_A}{\gamma - 1} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = 8,3 \text{ J}$$

5. Le gaz parfait subit a priori une transformation monobare quasi-statique entre 1 et 2. Or à chaque étape de la transformation, si l'on écrit l'équilibre du piston, on obtient que la pression du gaz vaut $P_0 + \frac{mg}{S}$, c'est-à-dire P_1 . La transformation de 1 à 2 est donc même en fait isobare.

6. nR et P (pression du gaz) étant constants, l'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire : $\frac{T_1}{V_A} = \frac{T_2}{V_B}$.

Donc $T_2 = \frac{V_B}{V_A}T_1$. AN : $T_2 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ K}$.

7. La transformation étant isobare, le premier principe appliqué au système {gaz dans l'enceinte} devient donc $\Delta H = Q_1^2$. Donc $Q_1^2 = C_p(T_2 - T_1) = \frac{P_0V_A\gamma}{\gamma - 1} \frac{T_2 - T_1}{T_0}$. AN : $Q_1^2 = 260 \text{ J}$.

8. Comme pour les questions précédentes, la transformation 2 → 3 est isochore et quasi-statique. La transformation 3 → 0 est isobare et quasi-statique.

9. U étant une fonction d'état, le premier principe de la thermodynamique appliqué sur un cycle au gaz dans l'enceinte s'écrit :

$$\Delta U = 0 = W + Q_0^1 + Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^0 \Rightarrow W = -Q_0^1 - Q_1^2 - Q_2^3 - Q_3^0$$

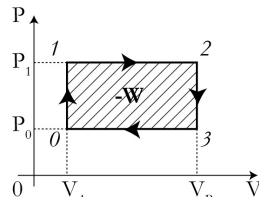
La transformation 2 → 3 étant isochore, on a $Q_2^3 = \frac{P_0V_A}{\gamma - 1} \frac{T_3 - T_2}{T_0}$ avec $T_3 = \frac{P_0}{P_2}T_2 = \frac{P_0}{P_1}T_2$ (loi des gaz parfaits, avec $P_3 = P_0$ et $P_2 = P_1$).

La transformation 3 → 0 étant isobare, $Q_3^0 = \frac{P_0V_A\gamma}{\gamma - 1} \frac{T_0 - T_3}{T_0}$.

On obtient donc $W = \frac{P_0V_A}{T_0} (T_1 + T_3 - T_0 - T_2) = P_0V_A \left(\frac{P_1}{P_0} + \frac{V_B}{V_A} - 1 - \frac{V_B}{V_A} \frac{P_1}{P_0} \right)$.

Donc $W = \frac{mg}{S}(V_A - V_B)$. AN : $W = -6,7 \text{ J}$.

10.



11. W est l'opposé de l'aire intérieure au cycle décrit dans le diagramme de Watt : $W = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A) = \frac{mg}{S}(V_A - V_B)$. On retrouve bien le résultat de la question précédente.

2 Disques protoplanétaires

Partie I : Forme du disque

Champs de gravité

1. **Champ de l'étoile.**

(a)
$$\vec{F}_{\text{étoile} \rightarrow M} = -G \frac{mM_E}{R^2} \vec{e}_r$$

(b) On détermine le travail élémentaire de la force :

$$\delta W = -G \frac{mM_E}{R^2} \vec{e}_r \cdot dR \vec{e}_r = -d \left(-G \frac{mM_E}{R} \right) \Rightarrow E_{P_{\text{grav}}}(M) = -G \frac{mM_E}{R}$$

(c) On pose $\vec{g}_E(M)$ tel que $\vec{F}_{\text{étoile} \rightarrow M} = m\vec{g}_E(M)$, d'où : $\vec{g}_E(M) = -G \frac{M_E}{R^2} \vec{e}_r$.

(d)

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \vec{OM} = R\vec{e}_r = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{\text{étoile} \rightarrow M} = -G \frac{mM_E}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \\ \vec{g}_E(M) = -G \frac{M_E}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \\ E_{P_{\text{grav}}}(M) = -G \frac{mM_E}{\sqrt{r^2 + z^2}} \end{cases}$$

2. **Champ du disque protoplanétaire.**

En écrivant $\|\vec{g}_D\| \propto \rho_D^\alpha e_D^\beta G^\gamma$ et avec $[\rho_D] = M.L^{-3}$, $[e_D] = L$ et $[g] = L.T^{-2} = M[G]/L^2$

$\Rightarrow [G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ on obtient : $[g_D] = L.T^{-2} = M^{\alpha-\gamma}L^{-3\alpha+\beta+3\gamma}T^{-2\gamma}$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ -2\gamma = -2 \\ -3\alpha + \beta + 3\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = \gamma = 1 \\ \beta = 1 + 3\alpha - 3\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g_D = \rho_D e_D G}$$

3. **Comparaison entre les deux champs gravitationnels.**

(a) Si l'on se place à distance r du centre du disque, c-à-d à distance totale $R \simeq \sqrt{r^2 + z^2} \simeq r$ (car $e_D \ll R_D$) le champ gravitationnel dû à l'étoile vaut : $\|\vec{g}_E\| \simeq M_E G/r^2$.

D'où un rapport $\frac{g_D}{g_E} \simeq \frac{\rho_D e_D G r^2}{M_E G}$. Le champ dû au disque sera négligeable devant celui de l'étoile si

$$\frac{g_D}{g_E} \ll 1 \Leftrightarrow r \ll R_C = \sqrt{\frac{M_E}{\rho_D e_D}}$$

(b) Si l'on exprime ρ_D en fonction de M_D : $\rho_D = \frac{M_D}{\pi R_D^2 e_D}$ le rayon critique devient : $R_C \simeq \sqrt{\frac{M_E}{M_D}} R_D$.

Or comme $M_D \simeq 0,1\% M_E = M_E/1000$ alors $R_C \simeq \sqrt{1000} R_D \simeq 30 R_D$

Donc, même au-delà du disque protoplanétaire, l'influence du champ gravitationnel du disque est négligeable, donc a fortiori à l'intérieur de celui-ci, l'hypothèse consistant à négliger le champ du disque devant celui de l'étoile est totalement justifiée.

Disque de gaz évasé

4. Modèle de l'atmosphère isotherme dans un champ de pesanteur uniforme

- (a) Principe fondamental de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme vertical : (axe Oz vertical ascendant)

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

- (b) Masse volumique de l'air à pression P : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{nRT_0/P} = \frac{PM}{RT_0}$ où M est la masse molaire de l'air, et R la constante des gaz parfaits

$$D'où \quad dP = -\frac{PM}{RT_0} g dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

- (c) Solution : $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right)$ où $h = \frac{RT}{Mg}$ (hauteur caractéristique de variation du champ

de pression dans l'atmosphère) et $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ (où ρ_0 est la masse volumique au niveau du sol).

- (d) Énergie potentielle de pesanteur d'une particule d'air (de masse moyenne $m = M/N_A$) :

$$E_{P_{\text{pes}}}(z) = mgz + 0 = \frac{M}{N_A} gz$$

$$\text{Or on a : } \rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{N_A mgz}{RT_0}\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{E_{P_{\text{pes}}}(z)}{k_B T_0}\right)$$

5. Distribution de masse dans le disque.

- (a) Par analogie avec ce qui précède :

$$\rho(r, z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{E_{P_{\text{grav}}}(r, z)}{k_B T}\right) = \rho_0 \exp\left(+\frac{GmM_E}{k_B T(r^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \rho_0 \exp\left(\frac{H(T)}{(r^2 + z^2)^{1/2}}\right)$$

avec $H(T) = \frac{GmM_E}{k_B T}$, longueur caractéristique de variation de la densité dans le disque

- (b) Comme $z \ll r$, on peut utiliser un DL : $(r^2 + z^2)^{-1/2} \simeq 1/r (1 - z^2/2r^2)$

$$D'où : \rho(r, z) = \rho_0 \exp\left(\frac{H(T)}{r}\right) \exp\left(-\frac{H(T)z^2}{2r^3}\right)$$

on retrouve l'expression suggérée, en posant

$$\begin{cases} \rho_1(r) = \rho_0 \exp\left(\frac{H(T)}{r}\right) \\ h(r) = \sqrt{\frac{2r^3}{H(T)}} = \sqrt{\frac{2k_B T(r) \cdot r^3}{GmM_E}} \end{cases}$$

La distribution des particules de gaz selon z est exponentiellement décroissante. La hauteur caractéristique de cette décroissance $h(r)$ est d'autant plus grande que r est grand (dépendance en $r^{3/2}$, si on néglige pour l'instant l'influence de $T(r)$) donc près de $r = 0$, les particules sont très proches de la partie centrale $z = 0$, et plus on s'éloigne vers les bords du disque, plus les particules se répartissent sur une altitude z élevée.

- (c) Si $T(r) \propto r^{-1/2}$, on a alors $h(r) \propto r^{(-1/2+3)/2} \propto r^{5/4} \propto r^{1,25}$ et $h(r)$ varie presque linéairement avec r .

Partie II : Modèle d'accrétion planétaire dans un disque

Mouvement de la poussière : étude de la sédimentation verticale

6. Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un grain de poussière, de masse m , dans le référentiel galiléen disco-centrique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g}_E$$

En projection selon l'axe z des coordonnées cylindriques : $\ddot{z} = -\frac{GM_E}{(r^2 + z^2)^{3/2}} z$.

Dans l'approximation d'un disque fin : $\ddot{z} \simeq -\frac{GM_E}{r^3} z = -\omega(r)^2 z$, avec $\omega(r) = \sqrt{\frac{GM_E}{r^3}}$ pulsation propre des oscillations verticales.

7. La courbe donnée est compatible avec l'équation obtenue, qui est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega(r)$, dont la solution est $z(t) = z_0 \cos(\omega(r)t)$. Le mouvement orbital incliné de ces grains de poussière correspond, en projection selon z , à une oscillation de part et d'autre du plan central du disque.

Avec $r = 1 \text{ U.A.}$ et $M_E = 1,75 M_S$ on calcule une période propre $T(r) = \frac{2\pi}{\omega(r)} = 2,4 \cdot 10^7 \text{ s}$ soit 0,75 an environ. L'unité de temps utilisée sur le graphe $z(t)$ est l'**année**.

8. Si l'on rajoute une force de type frottement fluide, cela ajoute un terme d'amortissement dans l'équation différentielle, qui devient : $\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \omega(r)^2 z = 0$

Les solutions de cette équation dépendent de la valeur du coefficient α :

- ◇ α «faible» ($\alpha < 2\omega(r)$, c-à-d $Q = \omega/\alpha > 1/2$) → régime pseudo-périodique (oscillations amorties)
- ◇ α «élevé» ($\alpha > 2\omega(r)$, c-à-d $Q < 1/2$) → régime apériodique (décroissance exponentielle d'autant plus lente que α est élevé) ;
- ◇ régime critique ($\alpha = 2\omega(r)$, c-à-d $Q = 1/2$), pour lequel la décroissance est la plus rapide.

Pour des gros grains (1 m) on observe un régime pseudo-périodique, alors que pour de tout petits grains (1 cm et moins), l'amplitude semble décroître sans oscillation. Ainsi, $\alpha \searrow$ **quand la taille des grains** \nearrow .

Pour les très petits grains, la force de gravitation n'est plus prépondérante par rapport à la force d'interaction locale avec les autres petits grains (pression, frottement visqueux), d'où l'absence de mouvement à grande échelle.

9. Pour les grains de 1 m, on observe de l'ordre de 5 oscillations avant amortissement, donc on peut estimer que $Q \sim 5$ d'où $\alpha = \omega/Q = 0,53 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$.

En utilisant l'expression de la force de Stokes :

$$\vec{F}_S = -6\pi\eta R \vec{v} = -m\alpha \vec{v} \Rightarrow \alpha = \frac{6\pi\eta R}{m} = \frac{9\eta}{2\rho_{\text{gr}} R^2}$$

A.N. : $\alpha \sim \frac{9 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 1} \sim 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ L'ordre de grandeur est donc le même que celui calculé précédemment, donc la modélisation précédemment adoptée semble correcte.

Modèle de collision

10. Estimation de la vitesse relative.

- (a) Objet de masse m lancé à vitesse initiale v_0 dans le champ de gravité g_0 uniforme. On cherche la portée D sous la forme :

$$D \propto g_0^a v_0^b m^c$$

Or $[D] = L$, $[g_0] L T^{-2}$, $[v_0] = L T^{-1}$ et $[m] = M$. Ainsi :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D \sim \frac{v_0^2}{g_0}}$$

- (b) Lors de l'arrivée d'un astéroïde sur un sol sédimentaire, on peut imaginer que l'impact génère une onde de choc, éjectant la terre avec une certaine vitesse (cette matière retombant sur les bords du cratère). L'énergie cinétique de l'astéroïde incident E_{Ci} se transforme en énergie cinétique des particules de terre E_{Ct} . En considérant que toute la terre se trouvant à distance D de l'astéroïde (ordre de grandeur de la largeur du cratère) et sur toute la profondeur P , est éjectée, alors on peut écrire :

$$\begin{cases} E_{Ci} \sim m_i v_i^2 \sim \rho_i L^3 v_i^2 \\ E_{Ct} \sim \rho_t D^2 P v_t^2 \end{cases}$$

en notant ρ_i la masse volumique de l'astéroïde de taille L et de vitesse incidente v_i , et ρ_t la masse volumique de la terre, éjectée à la vitesse v_t .

Or d'après le graphe établi par R.J. PIKE, on constate que $D \propto P$ et d'après la question précédente, on sait que $v_t^2 \sim D g_0$ (portée D de la trajectoire des particules de terre émises avec une vitesse v_t), d'où :

$$E_{Ct} \sim \rho_t D^4 g_0$$

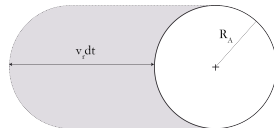
Finalement on peut écrire : $\rho_i L^3 v_i^2 \sim \rho_t D^4 g_0 \Rightarrow \boxed{D \sim \left(\frac{\rho_i}{\rho_t}\right)^{1/4} L^{3/4} v_i^{1/2} g_0^{-1/4}}$

- (c) Ces lois de puissance sont compatibles avec celles trouvées numériquement pour ce qui concerne g_0 (-0,25 à la main contre -0,22 numériquement), L (0,75 à la main contre 0,78 numériquement), et v_i (0,5 à la main contre 0,44 numériquement). Mais les puissances pour les masses volumiques diffèrent (0,25 et -0,25 à la main contre 0,33 et -0,33 numériquement). Probablement car on a négligé les phénomènes thermodynamiques (fusion de la météorite et des roches).
- (d) Pour Meteor Crater, les données sont : $D = 1,2$ km ; $L = 150$ m. On prend pour la roche sédimentaire la valeur de $\rho_{gr} = 0,5 \cdot 10^3$ kg.m⁻³. On obtient finalement :

$$\boxed{v_i \simeq \left(\frac{D}{1,161} \cdot \left(\frac{\rho_t}{\rho_i}\right)^{1/3} \cdot L^{-0,78} \cdot g^{0,22}\right)^{1/0,44} \simeq 348 \text{ m.s}^{-1} \simeq 1250 \text{ km/h}}$$

Modèle simple d'accrétion

11. Volume occupé par les corps susceptibles de heurter l'astre pdt dt : $dV = \pi R_A^2 v_r dt$



D'où un nombre de particules susceptibles de heurter A pdt dt : $\boxed{dN = \pi R_A^2 n^* v_r dt}$

12. Si les petits corps restent collés à A , sa masse augmente pendant dt de : $dM_A = \pi R_A^2 n^* m v_r dt$

Or la masse totale de A vaut : $M_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3 \rho_A \Rightarrow \frac{dM_A}{dt} = 4 \pi R_A^2 \rho_A \frac{dR_A}{dt}$

D'où $\boxed{\frac{dR_A}{dt} = \frac{n^* m v_r}{4 \rho_A}}$ et donc $\boxed{R_A(t) = \frac{n^* m v_r}{4 \rho_A} t}$ (croissance linéaire du rayon)

13. La masse volumique moyenne du disque protoplanétaire s'exprime comme : $\boxed{\rho_D = n^* \cdot m}$
 Pour atteindre un rayon de la moitié de celui de la Terre, il faut un temps :

$$\boxed{\tau = \frac{4 \rho_A}{\rho_D v_r} \frac{R_T}{2} = 1,28 \cdot 10^{13} \text{ s}}$$

Cela correspond à environ 400 000 ans, c'est-à-dire 2 ordres de grandeur en-dessous de la durée de 40 millions d'années dont parle le texte, ce qui ne permet pas de valider ce modèle très simple.

Pour expliquer cette différence, on peut évoquer le sillon qui se forme au cours de la formation d'une planète : il y a, sur leur simulation, déplétion de matière au niveau d'une coquille située juste autour de la planète en formation. Donc, si n^* ou ρ_D diminue juste autour de la planète, l'augmentation de masse (et donc de rayon) se fait plus lentement.

L'autre hypothèse suggérée, à savoir une donnée numérique du modèle douteuse peut être la valeur de ρ_A , qui est ici prise à une valeur relativement faible. Proche du centre de la planète, la masse volumique, sous l'effet des forces de pression, est bien plus élevée que 0,5 kg/m³.