

# DS de Physique n° 8

PCSI 1, année 2015-2016

Thèmes : solide en rotation, gaz parfait, statique des fluides.

Durée : 3 heures, calculatrice autorisée.

## Rappel des consignes générales.

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Les résultats littéraux non encadrés ne seront pas pris en compte.
- Les résultats littéraux doivent faire intervenir les notations de l'énoncé et non les notations personnelles. Dans le cas d'une notation non définie dans l'énoncé introduite par le candidat, celui-ci doit le définir avant ou juste après son introduction.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. La notation tiendra compte de ces initiatives.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Contenu

<b>I</b>	<b>Rotation à vitesse angulaire variable (d'après Mines MP 2005, Physique I)</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Atmosphère et montgolfière (d'après Mines MP 2008, Physique II)</b>	<b>4</b>
<b>III</b>	<b>Equivalent mésoscopique de l'équilibre liquide vapeur (d'après Aarts et al, Science 304, 847, 2004)</b>	<b>6</b>

Les trois problèmes sont indépendants. **Répondre à chaque problème dans l'ordre souhaité, mais au sein de chaque problème, répondez aux questions dans l'ordre indiqué en précisant le numéro complet des questions.**

# I Rotation à vitesse angulaire variable (d'après Mines MP 2005, Physique I)

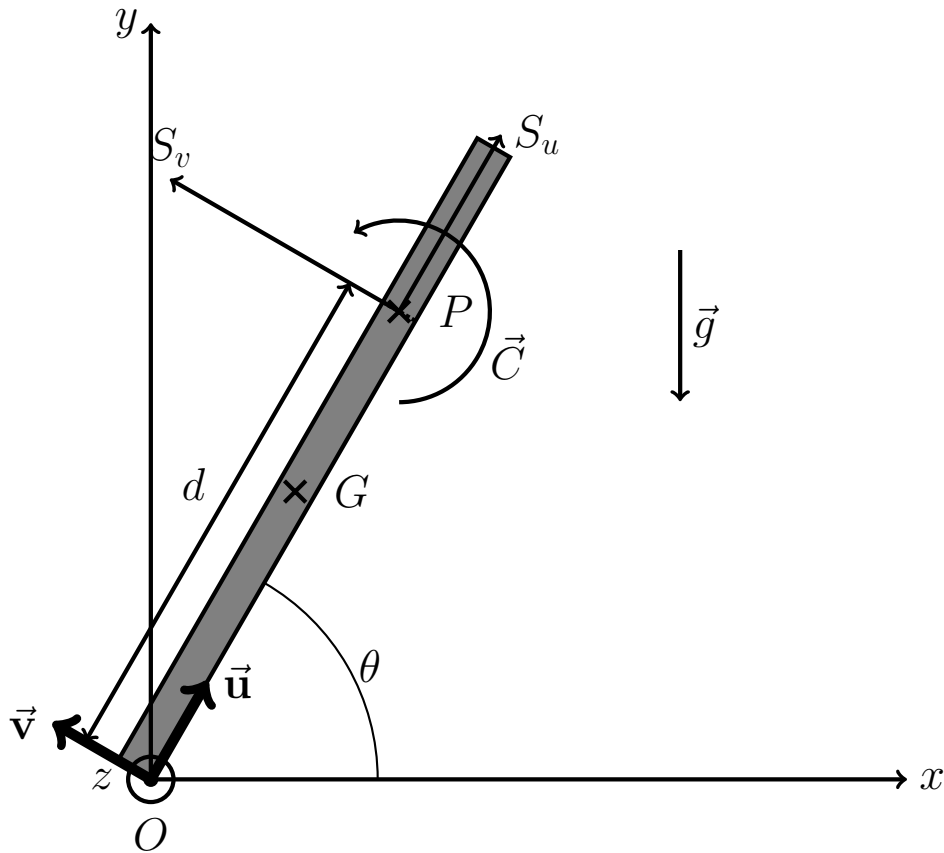


FIGURE 1 – La cheminée s'écroule

Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse  $M$ , de longueur  $D$  et de rayon très petit devant  $D$ , rayon qu'on négligera donc. On dynamite sa base (point  $O$ ) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point  $O$  bloqué par les débris de l'explosion. On appelle  $\theta$  l'angle de la cheminée avec l'horizontal. Sa dérivée temporelle est notée  $\dot{\theta}$ , et sa dérivée seconde  $\ddot{\theta}$ . Au moment de l'explosion, en  $t = 0$ , on a  $\theta = \pi/2$  et  $\dot{\theta} = 0$ . On étudie le mouvement de la cheminée dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, en projection sur la base mobile de coordonnées polaires  $\vec{u}, \vec{v}$ , où  $\vec{u}$  est porté par l'axe de la cheminée,  $\vec{v}$  est perpendiculaire à  $\vec{u}$  dans le sens de rotation de l'angle  $\theta$  et  $G$  est le centre de masse de la cheminée. Les moments d'inertie en  $G$  autour de l'axe  $Gz$  et en  $O$  autour de l'axe  $Oz$  sont respectivement  $J_G = \frac{1}{12}MD^2$  et  $J_O = \frac{1}{3}MD^2$ . La liaison pivot en  $O$  est parfaite.

1. Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en  $O$ , l'expression de  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $D, g$  et  $\theta$ .
2. Déterminer, par un raisonnement énergétique, l'expression de  $\dot{\theta}^2$  en fonction de  $D, g$  et  $\theta$ . On vérifiera de plus son raisonnement énergétique en redérivant la relation entre  $\ddot{\theta}, D, g$  et  $\theta$ .
3. Exprimer, en fonction de l'angle  $\theta$ , les composantes  $R_u$  et  $R_v$  de la réaction du sol en  $O$  en projection sur  $\vec{u}$  et sur  $\vec{v}$ .

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur  $OP = d$  de cheminée subit l'action du sol en  $O$ , l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en  $P$ . Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en  $P$  n'est pas ponctuel. L'action du

reste de la cheminée sur la longueur  $d$  est modélisée par une force  $\vec{S}$  de composantes  $S_u$  et  $S_v$  et un couple  $\vec{C}$  porté par l'axe horizontal  $Oz$ .

4. Quelle est la masse  $m$  de la longueur  $OP$  de la cheminée? Quelle est la position du centre d'inertie  $G_p$  de cette portion?
5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur  $d$  de cheminée, exprimer  $S_v$  en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\theta$ ,  $d$  et  $D$ . La grandeur  $S_v$  est appelée *effort de cisaillement*. Tracer qualitativement le graphe donnant  $S_v$  en fonction du rapport  $\frac{d}{D}$  ( $\theta$  est donné).
6. Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement  $S_v$  est le plus important; quel est ce point?
7. Montrer que le théorème du moment cinétique en  $O$ , appliqué à la longueur  $d$  de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté  $C$ ) du couple  $\vec{C}$  :

$$C = \frac{1}{4}Mgd \left( \frac{d}{D} - 1 \right)^2 \cos \theta.$$

8. Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.



## II Atmosphère et montgolfière (d'après Mines MP 2008, Physique II)

Les valeurs des constantes physiques utiles dans les applications numériques sont données à la fin du texte.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme  $g$ , est dirigé suivant l'axe vertical ascendant  $Oz$ , et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical.

Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée  $R$ . La masse molaire moyenne de l'air est notée  $M_e$ , sa pression  $P$ , sa température  $T$  et sa masse volumique  $\mu$ . On désigne par  $P_o$ ,  $T_o$  et  $\mu_o$  les valeurs de  $P$ ,  $T$  et  $\mu$  au niveau du sol (où  $z = 0$ ).

### II.A Atmosphère en équilibre

#### II.A.1 Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme  $T_o$ . On prendra  $T_o = 288$  K.

9. Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de  $P$ ,  $R$ ,  $T_o$  et  $M_e$ .
10. Ecrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  en fonction de  $P_o$ , de la hauteur barométrique  $H = RT_o/(M_e g)$  et de l'altitude  $z$ .
11. En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en  $O_2$  et de 80% en  $N_2$ , calculer la valeur numérique de  $H$ . A quelle altitude  $z_{50\%}^{iso}$  la pression est elle égale à  $P_o/2$ ?

#### II.A.2 Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type  $T = T_0(1 - \alpha z)$  où  $\alpha = 1/z_0$  est une constante positive. Cette approximation linéaire est en fait le développement au premier ordre en  $z/z_0$  d'une expression plus précise. La valeur expérimentale  $z_0 \simeq 33$  km justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

12. Montrer que l'on peut écrire  $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta$  et  $\mu(z) = \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$  où l'on donnera l'expression de  $\beta$  en fonction de  $H$  et de  $z_0$ .
13. À quelle altitude  $z_{50\%}^{pol}$  la pression est-elle égale à  $P_0/2$ ? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 11. Ce résultat était-il prévisible?
14. Un bulletin météorologique fournit les données représentées graphiquement sur les figures 1,2 et 3. La pression est donnée en  $10^5$  Pa, la température en K, la masse volumique en  $kg.m^{-3}$  et l'altitude en km. Un ajustement aux moindres carrés de ces données permet d'obtenir les relations :

$$\begin{aligned} T &= 288,14 - 6,94z \\ P &= 1,01(T/288,08)^{5,26} \end{aligned}$$

Ceci est-il compatible avec le modèle polytropique ?

Dans toute la suite du problème, on utilisera des valeurs numériques suivantes :  $T_0 = 288$  K,  $P_0 = 1013$  hPa,  $\beta = 5$  et  $z_0 = 40$  km, soit  $\alpha = 2,5 \times 10^{-5} m^{-1}$ .

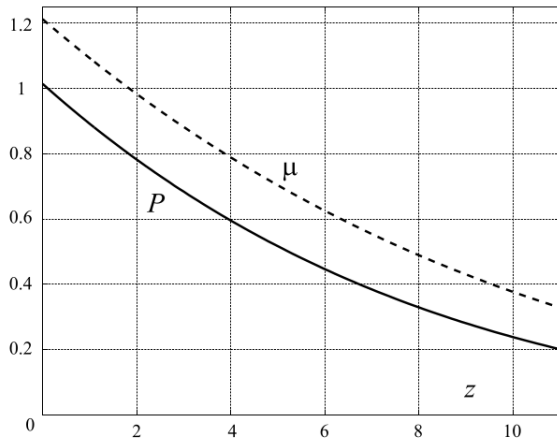


Figure 1

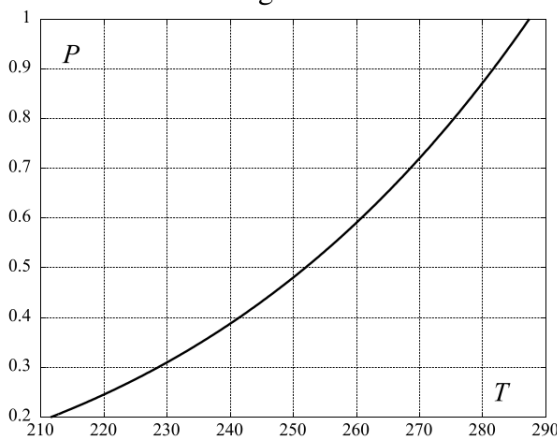


Figure 3

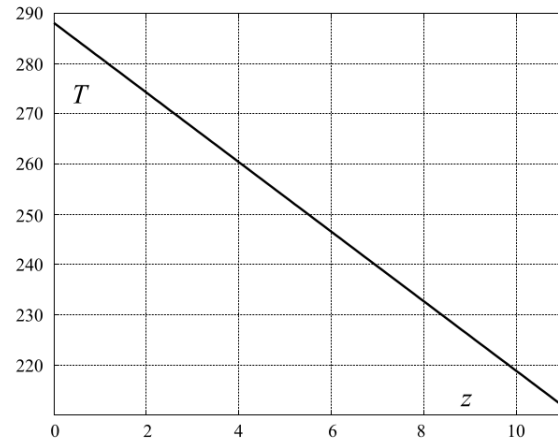


Figure 2

## II.B Equilibre d'une montgolfière

Une montgolfière standard reste à des altitudes raisonnables pour des questions évidentes de raréfaction en dioxygène. Le modèle polytropique des basses altitudes est donc bien adapté pour décrire son environnement atmosphérique, nous l'utiliserons désormais.

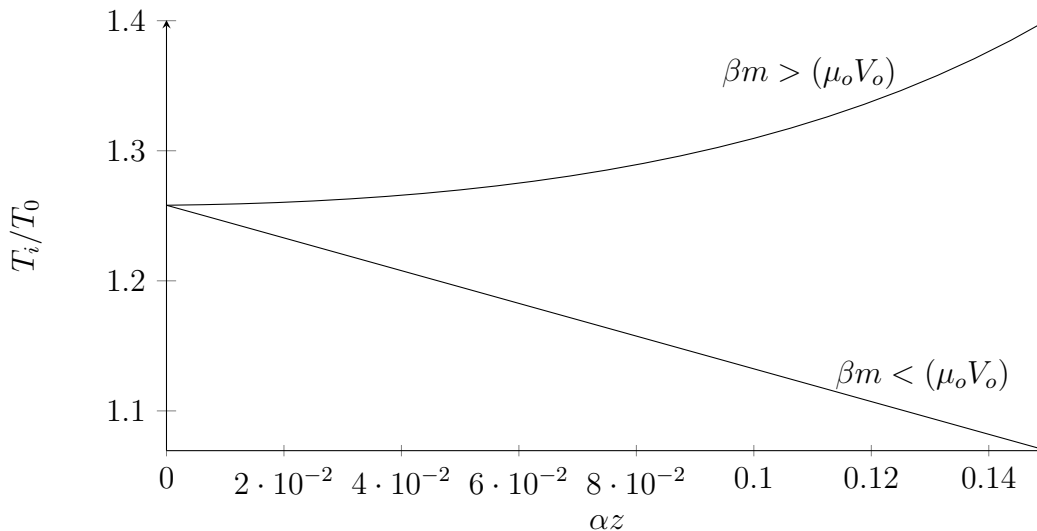
La pression, la masse volumique et la température de l'atmosphère à l'altitude  $z$  seront notées respectivement  $P_e$ ,  $\mu_e$  et  $T_e$ . La montgolfière est constituée d'une enveloppe ouverte de volume intérieur  $V_0 = 2000 \text{ m}^3$  et d'une nacelle (voir Fig. 4). La masse totale de l'enveloppe, de la nacelle et des passagers est notée  $m$ . On prendra  $m = 500 \text{ kg}$ ; le volume propre de ces différents éléments est négligeable. Le volume intérieur à l'enveloppe est constant, mais la masse  $m_i$  de l'air chaud emprisonné à l'intérieur de cette enveloppe est variable. La masse de l'ensemble est donc  $m + m_i$ . On suppose qu'à l'intérieur de l'enveloppe, la température  $T_i$  et la pression  $P_i$  sont uniformes. L'ouverture inférieure de l'enveloppe permet de réaliser en permanence l'équilibre de pression entre l'air froid extérieur et l'air chaud intérieur. On suppose enfin que les gaz de combustion n'affectent pas la masse molaire  $M_e$ .



Figure 4 - La montgolfière

15. Exprimer la masse  $m_i$  de l'air chaud dans l'enveloppe en fonction de  $P_e$ ,  $V_0$ ,  $M_e$ , et  $RT_i$  puis en fonction de  $\mu_e$ ,  $V_0$ ,  $T_e$ , et  $T_i$ .
16. À l'équilibre mécanique, la poussée d'Archimède compense le poids de la montgolfière et de l'air chaud qu'elle contient. Trouver la relation qui permet alors d'exprimer  $m$  en fonction de  $m_i$ ,  $T_e$  et  $T_i$ .
17. On note  $z_m$  l'altitude où la poussée d'Archimède exercée par l'air compense le poids  $mg$ . Exprimer  $z_m$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$ ,  $\mu_0$  et  $V_0$ . Calculer la valeur numérique de  $z_m$ .

18. On note  $T_d$  la valeur minimale de la température  $T_i$  permettant le décollage de la montgolfière. Etablir la relation, très simple, liant  $m/(\mu_o V_o)$  à  $1 - T_o/T_i$ . Calculer la valeur numérique de  $T_d$ .
19. Ci-dessus sont représentées les allures de courbes représentatives de  $T_i/T_o$  en fonction de  $\alpha z$  selon les valeurs de  $\beta m/(\mu_o V_o)$ . On considère que pour  $\beta m < (\mu_o V_o)$ ,  $T_i/T_o$  diminue avec  $\alpha z$ , et que  $\beta m > (\mu_o V_o)$ ,  $T_i/T_o$  augmente avec  $\alpha z$ . La limite entre ces deux comportements est prise comme étant  $\beta m = (\mu_o V_o)$ . En considérant la phase de descente, expliquer pourquoi une montgolfière satisfaisant la condition  $\beta m < (\mu_o V_o)$  fait courir le risque d'un écrasement au sol.



20. Calculer la valeur numérique  $V_{max}$  du volume de l'enveloppe permettant de satisfaire la condition  $T'_i(0) > 0$ . Pour une valeur  $T_{max} = 373$  K de la température maximale acceptable pour une montgolfière, calculer la valeur minimale  $V_{min}$  du volume de l'enveloppe qui permet le décollage. Calculer les valeurs de  $z_m$  associées à  $V_{min}$  et  $V_{max}$ .

### Valeurs numériques utiles

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ,

Accélération de la gravité à la surface de la Terre :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-1}$

Masse atomique de l'oxygène :  $M_O = 16 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

Masse atomique de l'azote :  $M_N = 14 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

## III Equivalent mésoscopique de l'équilibre liquide vapeur (d'après Aarts et al, Science 304, 847, 2004)

L'humain a tendance à vouloir tout voir. Or comble de malchance, il ne peut voir les phénomènes à toute petite échelle. Dans le cas qui nous intéresse, l'expérimentateur aussi bon soit-il ne pourra pas visualiser directement l'interface eau-vapeur d'eau qui présente des motifs de l'ordre de l'angstrom. Peu importe, il en construira un équivalent qu'il peut voir. C'est ce qu'ont réalisé les chercheurs Aarts, Schmidt et Lekkerkerker expérimentalement et qui a donné lieu à de très belles expériences.



FIGURE 2 – Photographie d'une interface colloïdale tiré de l'article, l'équivalent du liquide est coloré et situé en bas ; l'équivalent du gaz est plus sombre et situé en haut.

Ce problème vise à comprendre comment les chercheurs ont réalisé l'équivalent à plus grande échelle de l'interaction entre deux molécules quelconques.

21. Rappeler pourquoi il n'est pas possible de visualiser directement l'interface eau-vapeur d'eau qui présente des irrégularités de l'ordre de l'angstrom.
22. Tracer l'allure de l'énergie potentielle d'interaction  $E_{int}(r)$  entre deux atomes/molécules quelconques de taille  $a$ . Interpréter ce qui se passe lorsque la distance  $r$  entre les deux atomes/molécules est très petite. Préciser si cela correspond à une répulsion ou à une attraction. Même question lorsque la distance  $r$  est de l'ordre de quelques  $a$ .

Pour obtenir l'équivalent mésoscopique de l'interface liquide-vapeur, les chercheurs ont simplement changé la taille des briques élémentaires –atomes ou molécules dans le cas des liquides usuels. Ils ont travaillé avec ce qu'on appelle des colloïdes, qu'on considèrera ici comme des sphères dures de rayon  $R_b = 70$  nm. Ces colloïdes sont immergés dans un solvant, qui a pour rôle d'éviter que les colloïdes ne "tombent" et a été choisi afin de n'induire aucune interaction supplémentaire par rapport à celles présentées dans la suite. On suppose la distribution des colloïdes homogène dans le solvant.

On notera  $k_B$  la constante de Boltzmann, et  $T$  la température de la solution colloïdale.

### III.A La répulsion : modèle de sphères dures

23. A l'aide d'un schéma, montrer qu'une distance intercolloïde  $D$  inférieure à  $2R_b$  est impossible si les colloïdes sont des sphères dures. En partant de colloïdes légèrement déformables et de l'interprétation physique de l'énergie potentielle d'interaction, justifier que l'énergie potentielle d'interaction  $E_{int}(D)$  est prise alors comme étant infinie pour  $D < 2R_b$ .

### III.B L'attraction : interaction de déplétion

Pour introduire une interaction attractive entre les colloïdes, les chercheurs ont rajouté de plus petits colloïdes, considérés comme des sphères de taille  $r_s$ . Pour comprendre l'influence des petits colloïdes sur les gros colloïdes, on suppose que :

- les petits colloïdes se comportent comme un gaz parfait,
- on exagère la différence de taille entre les deux types de colloïdes afin qu'au niveau d'une collision petit colloïde-gros colloïde, tout se passe localement comme si le petit colloïde entrait en collision avec une surface plane,
- les gros colloïdes se comportent eux aussi comme un gaz parfait,
- du point de vue des petits colloïdes, les gros colloïdes sont considérés comme statique.

24. Schématiser le plus simplement possible la situation.
25. Par application de la définition de la température cinétique, justifier la dernière hypothèse "du point de vue des petits colloïdes, les gros colloïdes sont considérés comme statique".
26. En considérant le gros colloïde comme une paroi plane du point de vue des chocs petits colloïdes-gros colloïdes, déterminer la pression  $P_s$  exercée par les petits colloïdes dans l'hypothèse de l'équilibre statistique simplifiée des vitesses. On notera  $m_s$  la masse des petits colloïdes,  $u_s$  leur vitesse quadratique moyenne et  $n_s^*$  leur densité particulière.
27. Le but est maintenant d'obtenir  $E_{int}(D)$ . Pour cela, on place deux colloïdes à la distance  $D$  l'un de l'autre qu'on suppose fixes et on détermine la force d'interaction, puis en intégrant  $E_{int}(D)$ .
  - 27.a) Schématiser un gros colloïde, avec un deuxième très loin. Justifier par un raisonnement sur les symétries que la présence du deuxième colloïde ne modifie pas le comportement du premier en raisonnant sur l'action des petits colloïdes sur le premier.

- 27.b) On dira alors que la force d'interaction du deuxième colloïde sur le premier est nulle. Comment choisir alors la valeur constante de l'énergie potentielle  $E_{int}(D)$  d'interaction ? On supposera que la valeur de ce potentiel d'interaction est valable dès que  $D \geq 2R_b + 2r_s$ .

Considérons le 3ème et dernier cas lorsque  $2R_b \leq D \leq 2R_b + 2r_s$ .

Notons l'axe ( $Oz$ ) l'axe reliant les centres des deux gros colloïdes avec  $O$  le centre du premier colloïde. Associons à cet axe un repère sphérique avec les coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . Le colloïde correspond à la sphère d'équation  $r = R_b$ .

28. Schématiser la situation.
29. En prenant en compte la taille finie  $2r_s$  des petits colloïdes, expliquer que les petits colloïdes ne peuvent entrer en collision avec le gros colloïde que si le lieu de la collision vérifie  $\theta > \alpha$ . Déterminer  $\alpha$ .
30. Récapituler les valeurs de  $\theta$  et de  $\varphi$  décrivant les lieux possibles de collision sur le gros colloïde.
31. Rappeler l'élément de surface  $d^2\vec{S}$  correspondant à une variation d'angle  $\theta$  de  $d\theta$  et à une variation d'angle  $\varphi$  de  $d\varphi$ . Quelle est alors la force  $d^2\vec{F}_{pression}$  de surface appliquée par les petits colloïdes sur cet élément de surface ?
32. A-t-on la totalité de la force  $d^2\vec{F}_{pression}$  qui contribue à la force de pression finale  $\vec{F}_{pression}$  ? On présentera une réponse faisant intervenir les symétries du problème.
33. Déterminer l'expression de  $\vec{F}_{pression}$  en fonction de  $n_s^*$ ,  $m_s$ ,  $u_s$ ,  $R_b$  et  $\alpha$ , puis en fonction de  $n_s^*$ ,  $k_B$ ,  $T$ ,  $R_b$ ,  $R_s$ , et  $D$ , retrouver que

$$\vec{F}_{pression} = \frac{\pi}{3} n_s^* m_s u_s^2 (R_b - D/2 + r_s)(R_b + D/2 - r_s) \vec{u}_z$$

34. Cette force  $\vec{F}_{pression}$ , même si elle n'est pas due directement au deuxième gros colloïde, est induite par sa présence. On peut donc la considérer comme une force d'interaction du deuxième colloïde sur le premier. Comme elle est due à l'absence de petits colloïdes dans un volume qualifié de "volume exclu", on la nomme "force de déplétion" ou "interaction de déplétion". En déduire la force d'interaction du premier colloïde situé en  $O$  sur le deuxième situé en  $z = D$ . Puis, en déduire à une constante près l'énergie potentielle d'interaction  $E_{int}(D)$  pour  $2R_b \leq D \leq 2R_b + 2r_s$ .
35. Déterminer la constante d'intégration par la condition de continuité de  $E_{int}(D)$  en  $D = 2R_b + 2r_s$ .
36. Tracer l'allure de la fonction  $E_{int}(D)$ .
37. En déduire une valeur caractéristique de  $E_{int}(D)$ .
38. Que ce soit dans le cas d'une interface usuelle (eau-vapeur d'eau) ou colloïdale, la transition liquide vapeur se réalise lorsque l'énergie potentielle d'une brique (colloïde ou molécule selon l'interface considérée) devient de l'ordre de grandeur de son énergie cinétique. Pour déterminer une valeur typique de l'énergie cinétique des gros colloïdes, on rappelle que les gros colloïdes forment un gaz parfait. En déduire un ordre de grandeur de  $n_s^*$  à l'équilibre liquide colloïdal-gaz colloïdal.
39. Dans l'article, les chercheurs indiquent la fraction volumique de petits colloïdes,  $\phi_s$ , à l'équilibre liquide colloïdale-gaz colloïdal. On lit que  $\phi_s$  est de l'ordre de 0.5 – 0.6. Est-ce cohérent avec le modèle simplifié présenté ci-dessus.
40. Question supplémentaire : l'interprétation de l'expérience reste relativement simple. Expérimentalement, il a fallu de l'ingéniosité pour choisir le bon solvant et les natures adéquates des colloïdes afin de limiter quelles interactions ?