

**MÉCANIQUE**

**I. Étude d'un satellite de télédétection terrestre** (d'après ATS 2014)

**Préliminaires.**

1. On a  $K = \mathcal{G}M_T m$  avec  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation universelle et  $M_T$  la masse de la Terre. Le champ à la surface est la force par unité de masse donc  $g_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$ , d'où  $K = m g_0 R_T^2$ .

Cette force est toujours dirigée selon  $-\vec{OM}$  donc elle est **attractive**.

2. Notons  $\vec{u}$  le vecteur unitaire tel que  $\vec{OM} = r \vec{u}$  avec  $r = OM$ . Le travail élémentaire vaut  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\frac{K}{r^2} \vec{u} \cdot (dr \vec{u} + r d\vec{u})$ . Or  $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$  car  $\vec{u}$  est de norme constante. Donc  $\delta W = -K \frac{dr}{r^2}$  et donc  $\delta W = -dE_p(r)$

avec  $E_p(r) = -\frac{K}{r} + \text{constante}$ , la constante étant prise nulle par convention. Le force  $\vec{F}$  est donc **conservative car  $E_p(r)$  ne dépend explicitement que de la position**.

3. Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) dans  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{OM} \wedge (-K) \frac{\vec{OM}}{OM^3} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{L}_O = \text{constante}}$$

Ainsi :  $\forall t \quad \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$ . Donc à tout instant, le vecteur  $\vec{OM}$  est orthogonal à  $\vec{L}_O$ . Ainsi, **le mouvement est inscrit dans le plan orthogonal à  $\vec{L}_O$  passant par  $O$** .

4. Dans le plan et en polaires on a  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ , et  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ , d'où  $\vec{L}_O = mr^2 \dot{\theta} \vec{k}$ .

5. Le Théorème de la Puissance Mécanique (TPM) s'écrit dans  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{constante}}$$

Or  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$  et  $L_O = mr^2 |\dot{\theta}|$  donc  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  avec  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$ .

6. Comme  $\mathcal{E}_c \geq 0$  on a nécessairement  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$ , ce qui contraint l'espace des valeurs de  $r$  possibles. En particulier, on a forcément  $r \geq r_{\min} > 0$  car  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$ .

- Une trajectoire **elliptique** est bornée, donc cela correspond nécessairement à  $\boxed{\mathcal{E}_{m,1} < 0}$ , sinon il n'y a pas de borne supérieure à  $r$ .
- Au contraire, une trajectoire **hyperbolique** est non bornée donc correspond nécessairement à  $\boxed{\mathcal{E}_{m,1} \geq 0}$ .

Sans calcul supplémentaire, il n'existe pas de moyen simple de justifier que le cas  $\mathcal{E}_m = 0$  ne correspond pas à une hyperbole.

*Remarque : l'énoncé original est donc mal posé. Pour répondre il faudrait par exemple calculer  $\mathcal{E}_m$  en fonction de l'excentricité, ce qui nécessite de résoudre l'équation du mouvement...*

- Une trajectoire circulaire correspond à  $r = \text{constante}$ , donc  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \text{constante} = \mathcal{E}_m$ , donc à  $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\min}}$ .

**Mise en orbite circulaire du satellite.**

7.  $L_O = mr^2 |\dot{\theta}| = \text{constante}$  or  $r = \text{constante}$  pour un mouvement circulaire donc  $\dot{\theta} = \text{constante}$ , donc  $v = ||\vec{v}|| = r |\dot{\theta}| = \text{constante}$ . Le mouvement est donc uniforme.

*Remarque : la projection du PFD selon  $\vec{u}_\theta$  fournit une démonstration alternative pour ce résultat, puisque  $a_\theta = r \dot{\theta} = 0$  pour une force centrale de centre  $O$ .*

La projection du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) selon  $\vec{u}_r$  s'écrit  $ma_\theta = m \frac{v^2}{r} = -\frac{K}{r^2}$ , d'où

$$\boxed{v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{r}}$$

8. On en déduit  $\mathcal{E}_c = \frac{m g_0 R_T^2}{2r} = -\frac{\mathcal{E}_p}{2}$  et  $\mathcal{E}_m = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r} = -\mathcal{E}_c < 0$ .

9. On obtient  $\mathcal{E}_{m,b} = -1,0 \times 10^{11}$  J et  $\mathcal{E}_{m,h} = -2,1 \times 10^{10}$  J.

**Mise en orbite haute du satellite.**

10. En  $A$  et  $P$  le rayon  $r$  est extremal donc  $\boxed{\dot{r} = 0}$ . D'autre part  $\boxed{a = \frac{1}{2} (r_p + r_h)}$ .

11. Par conséquent  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_b) = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_h)$ . Ainsi,  $r_b$  et  $r_h$  sont les deux solutions de l'équation du second ordre :

$$\mathcal{E}_m = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{m g_0 R_T^2}{r} \Rightarrow \mathcal{E}_m r^2 + m g_0 R_T^2 r - \frac{L_O^2}{2m} = 0.$$

On en déduit  $r_b = -\frac{m g_0 R_T^2}{\mathcal{E}_m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\mathcal{E}_m}$  avec  $\Delta = m^2 g_0^2 R_T^4 + 4 \frac{\mathcal{E}_m L_O^2}{2m}$ . Et donc  $2a = r_b + r_h = -\frac{2m g_0 R_T^2}{\mathcal{E}_m}$ . Finalement

on obtient  $\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{m g_0 R_T^2}{a}}$ .

12. On exploite le fait que  $\mathcal{E}_{m,t} = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_b) = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_h)$ . Le point  $r = r_h$  est plus adapté pour déterminer  $\mathcal{E}_m$  avec précision. On obtient  $\mathcal{E}_{m,t} = -33$  GJ.

13. Sur chaque courbe, l'énergie de la trajectoire circulaire correspond à l'énergie minimale, comme expliqué en question 6. On obtient les mêmes valeurs que précédemment :  $\mathcal{E}_{m,b} = -1,0 \times 10^2$  GJ et  $\mathcal{E}_{m,h} = -21$  GJ.

14. Il faut donc apporter une énergie  $\boxed{\Delta \mathcal{E}_m} = \mathcal{E}_{m,h} - \mathcal{E}_{m,b} \approx 8 \times 10^1$  GJ.

Ceci correspond à une masse de carburant  $\boxed{m_c = \frac{\Delta \mathcal{E}_m}{P_c} = 1,6$  t.

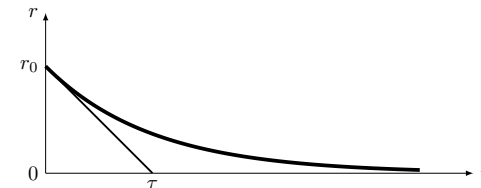
**Chute du satellite.**

15. On écrit que pour un mouvement circulaire uniforme,  $v = \frac{2\pi r}{T}$ , d'où  $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{mr^3}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}}}$ . Il s'agit de la **Troisième loi de Kepler**.

16. Le TPM s'écrit maintenant  $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -k v^2$ . Or  $\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2r(t)}$  donc ceci conduit à

$$\frac{K}{2r^2} \dot{r} = -k \frac{K}{mr} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau} r = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{2k}}$$

On vérifie que  $\tau$  est bien un temps :  $[\tau] = \frac{[mv]}{[kv]} = \frac{\text{MLT}^{-1}}{\text{MLT}^{-2}} = \underline{\underline{T}}$ .



17. On en déduit  $\boxed{r = r_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$ .

18. D'où l'allure sur le graphe ci-contre :

## II. L'expérience d'Eötvös

(d'après Mines/Ponts MP 2015)

### 1. Principe d'inertie :

Il existe au moins un référentiel  $\mathcal{R}$ , dit **galiléen**, dans lequel le mouvement de tout point matériel isolé est rectiligne uniforme.

### Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) :

Le mouvement du point matériel dans un référentiel  $\mathcal{R}$  **galiléen**, soumis aux forces  $\vec{F}_{i \rightarrow M}$ , est affecté selon la relation :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}_{|\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_{i \rightarrow M} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m_i \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

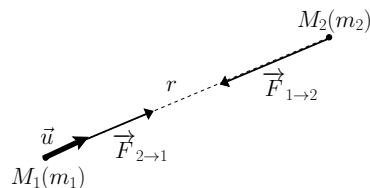
où  $m_i$  est la *masse inerte*.

### 2. Loi de la gravitation universelle :

Deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masses *graves* respectives  $m_1$  et  $m_2$  **s'attirent** proportionnellement à leurs masses et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}$$

avec  $\mathcal{G} \sim 10^{-10} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ .



## II.1. Mesure du coefficient de torsion du pendule

3. La puissance du couple de torsion s'écrit  $\vec{M}_0 \cdot \dot{\theta} \vec{u}_z = -C(\theta - \theta_0) \cdot \dot{\theta} = -C(\theta - \theta_0) \cdot \frac{d\theta - \theta_0}{dt}$  avec

$$E_{p,S} = \frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2 \quad \text{Par ailleurs on a} \quad E_{c,S} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad \text{D'où} \quad E_{m,S} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C(\theta - \theta_0)^2$$

4. Le Théorème de la Puissance Cinétique (TPM) dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen s'écrit :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\alpha \dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad J \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + C(\theta - \theta_0) = 0,$$

après simplification par  $\dot{\theta}$ .

5. a) L'équation différentielle est du second ordre, linéaire à coefficients constants. On cherche des solutions sous la forme  $e^{rt}$  pour l'équation sans second membre associée, ce qui conduit à l'équation caractéristique  $Jr^2 + \alpha r + C = 0$ . Le discriminant  $\Delta = \alpha^2 - 4JC$  est négatif pour une solution oscillatoire, donc  $\alpha < 2\sqrt{JC}$ . Les oscillations sont très faiblement amorties si le terme d'amortissement est quasi-négligeable, donc si  $\alpha \ll 2\sqrt{JC}$ .

b) La solution générale est la somme de la solution particulière constante  $\theta_p = \theta_0$  et de la solution générale de l'équation sans second membre :  $\theta(t) = \theta_0 + (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4CJ}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2J}{\alpha}$$

$$\theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \theta_0 = \theta_\infty$$

c) On a  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  d'où  $T = T_0 (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$  avec  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . En développant au premier ordre non nul en  $\varepsilon$ , on obtient :  $\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T}{T_0} - 1 = (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx \frac{\varepsilon^2}{2}$ . Cet écart relatif est inférieur à 1% si  $\varepsilon < 0,14$ .

6. a) On a  $T \approx T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$  donc  $T^2 = aL^2 + b$  avec  $a = \frac{8\pi^2 m}{C}$  et  $b = \frac{4\pi^2 (J_0 + 2J_1)}{C}$ .

b) On effectue une régression linéaire de  $T^2 = f(L^2)$ , ce qui donne  $a = 5,27 \times 10^7 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$  et  $b = 715 \text{ s}^2$

avec un coefficient de corrélation  $r^2 = 0,99998$ . On en déduit  $C = \frac{8\pi^2 m}{a} = 3,00 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

c) Les valeurs obtenues conduisent à  $T^2 > 200000 \gg b$  donc on a  $T^2 \approx aL^2$ , d'où  $m \approx \frac{C T^2}{8\pi^2 L^2}$ .

## II.2. Résultats et précision de l'expérience

Remarque : erreur d'énoncé... Le référentiel  $\mathcal{R}_t$  n'est pas plus galiléen que  $\mathcal{R}$ , puisque la Terre tourne sur elle-même. C'est pourquoi on ajoute la force d'inertie.

7.

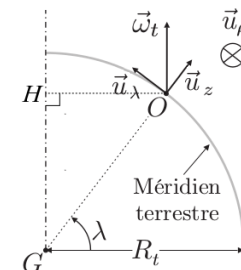
a) D'après le schéma on a  $\vec{HO} = R_T \cos \lambda (\cos \lambda \vec{u}_z - \sin \lambda \vec{u}_\lambda)$ .

Dans le plan horizontal  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\lambda)$  on a

$$\vec{OM}_j = \varepsilon_j (\cos \theta \vec{u}_\rho + \sin \theta \vec{u}_\lambda), \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 = -1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = 1.$$

b)  $\mathcal{M}_{ij}^z = \vec{u}_z \cdot (\vec{OM}_j \wedge \vec{F}_{ij}^z)$ . On obtient

$$\mathcal{M}_{ij}^z = -\varepsilon_j m_{ij} \omega_T^2 L R_T \cos \lambda \sin \lambda \cos \theta.$$



8. On applique le TMC dans  $\mathcal{R}_t$  par rapport à l'axe  $Gz = Oz$ , qui est fixe dans  $\mathcal{R}_t$ . À l'équilibre, la vitesse est nulle donc le couple de frottement fluide est nul. Le moment des forces de gravitation est nul car elles sont centrales de centre  $G$ . Et le moment cinétique est constant. On obtient donc un équilibre entre le moment de torsion et celui de la force d'inertie :

$$0 = -C(\theta_{\infty 1} - \theta_0) + \mathcal{M}_{i_1}^z + \mathcal{M}_{i_2}^z \quad \Rightarrow \quad C(\theta_{\infty 1} - \theta_0) = (m_{i_1} - m_{i_2}) \omega_T^2 L R_T \cos \lambda \sin \lambda \cos \theta_{\infty 1}.$$

La rotation de  $\pi$  conduit à la même relation dans laquelle les rôles de  $M_1$  et  $M_2$  sont inversés :

$$C(\theta_{\infty 2} - \theta_0) = -(m_{i_1} - m_{i_2}) \omega_T^2 L R_T \cos \lambda \sin \lambda \cos \theta_{\infty 2}.$$

En supposant  $\cos \theta_{\infty 1} \approx \cos \theta_{\infty 2} \approx 1$ , et en soustrayant les deux équations précédentes, on obtient

$$\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = \frac{1}{C} (m_{i_1} - m_{i_2}) \omega_T^2 L R_T \sin(2\lambda).$$

9. On obtient  $\delta_m = \frac{C \Delta\theta}{m \omega_T^2 L R_T \sin(2\lambda)}$ . Or on a obtenu en 6. :  $m \approx \frac{C}{8\pi^2} \frac{T^2}{L^2}$ , ce qui conduit à

$$\delta_m = \frac{8\pi^2 L \Delta\theta}{T^2 \omega_T^2 R_T \sin(2\lambda)}.$$

La précision de la lunette donne accès à une variation  $\Delta\theta > \frac{1 \text{ mm}}{2 \text{ m}} = 5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ . Pour la longueur  $L = 6 \text{ cm}$ , la période vaut  $T = 436 \text{ s}$  (cf 6.). Enfin on a  $\omega_T \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . D'où finalement  $\delta_m > \delta_{m_{\max}} = 3,7 \times 10^{-7}$ .

10. Le principe d'équivalence est donc vérifié à  $3,7 \times 10^{-7}$  près.

**III. Record du TGV : 574,8 kilomètres par heure !** (d'après Mines/Ponts MP 2010)

1. a) Par définition de l'accélération moyenne :  $a_i = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dv}{dt} dt = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} = a_i$ . Les valeurs sont consignées dans le tableau ci-dessous.

$i$ (s)	0	1	2	3	4	5	6
$a_i$ (m.s <sup>-2</sup> )	0,595	0,556	0,479	0,448	0,183	0,434	0,140
$d_i$ (m)	1458	1215	1813	2368	6861	3333	11688

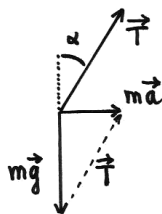
- b) En intégrant  $a = a_i = \text{constante}$  entre  $t_i$  et  $t$  on obtient  $v = a_i(t - t_i) + v_i$ . Puis entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  :  $d_i = \frac{1}{2}a_i(t_{i+1} - t_i)^2 + v_i(t_{i+1} - t_i)$ . En remplaçant on obtient finalement  $d_i = \frac{1}{2}(v_{i+1} + v_i)(t_{i+1} - t_i)$ , résultat qui s'obtient aussi géométriquement (aire d'un triangle,  $v(t)$  étant affine).

- c) D'où  $D = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 28,7 \text{ km}$ .

2.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masselotte de masse  $m$  s'écrit :  $m\vec{a}_0 = m\vec{g} + \vec{T} \Leftrightarrow \vec{T} = m\vec{a}_0 - m\vec{g}$ . Dans le triangle rectangle formé par ces 3 vecteurs on a :  $\tan \alpha = \frac{ma_0}{mg}$ , d'où

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a_0}{g}\right).$$



3. On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) au système train, en négligeant les forces tangentielles appliquées sur les roues non motrices<sup>1</sup> :

$$M_T \vec{a} = M_T \vec{g} + (n + n') \vec{N} + n \vec{T} + \vec{R}$$

avec  $n = 24$  roues motrices,  $n' = 8$  roues non motrices, et  $\vec{N}$  est la réaction normale des rails sur chaque roue. Par projection on obtient  $N = \frac{M_T}{n+n'} g$  et  $T = \frac{1}{n} (M_T a + R)$  où toutes les grandeurs sont des normes. On en déduit le rapport des composantes de la réaction des rails pour une roue motrice :

$$\frac{T}{N} = \frac{n + n'}{ng} \left( a + \frac{R}{M_T} \right).$$

On voit que ce rapport croît avec l'accélération, ce qui confirme que le risque de patinage (glissement) croît avec l'accélération. Au démarrage l'accélération est maximale et vaut  $a_0$ ,

la vitesse est nulle et donc  $\mu = \mu(0) = 0,33$ . L'application numérique conduit à  $\frac{T}{N} \approx 0,08 < \mu(0)$ , donc

la condition de frottement statique (loi de Coulomb) est largement vérifiée. Il n'y a **pas de risque de patinage**.

4. a) Appliquons le Théorème de la Puissance Cinétique (TPC) au train (rame DUPLEX) en supposant qu'une vitesse constante est atteinte sur terrain plat :  $\frac{dE_c}{dt} = 0 = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_R = \mathcal{P}_m - RV$ . La puissance des forces de frottement à la vitesse record serait alors  $\mathcal{P}_{R_{\max}} = R(V_{\max})V_{\max} \approx 50 \text{ MW}$ , ce qui est nettement supérieur à la puissance motrice  $\mathcal{P}_m$ . En l'absence d'une force supplémentaire (pesanteur en pente), on ne peut donc atteindre cette vitesse limite puisque qu'il faudrait au moins une puissance totale nulle pour s'y maintenir.

- b) On applique le même raisonnement mais pour la rame 150, et en considérons une pente d'angle  $\beta$  avec l'horizontale. Il faut donc ajouter la puissance du poids

$$0 = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{R_{\max}} + M_T \vec{g} \cdot \vec{V}_{\max} = \mathcal{P}_m - R(V_{\max}) \cdot V_{\max} + M_T g V_{\max} \sin \beta$$

1. On peut montrer que cela est valable si la masse de ces roues est négligeable devant la masse totale du train. Ainsi leur mise en rotation ne rajoute quasiment pas d'inertie au train.

$$\Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{R(V_{\max}) - \mathcal{P}_m/V_{\max}}{M_T g}\right) = 1,9^\circ.$$

- c) La vitesse angulaire des roues dépend de la vitesse du train et du rayon :  $\omega = \frac{V}{R}$ . Plus  $R$  est grand, plus  $\omega$  est petit, donc plus l'effort est grand. Pour un moment résultant du couple moteur fixé  $\Gamma_m$ , la puissance motrice conférée à une roue vaut  $\mathcal{P}_m = \Gamma_m \cdot \omega = \Gamma_m \frac{V}{R}$ . Ainsi, à moteur et vitesse fixés, **la puissance consommée est moindre si les roues sont plus larges**.

5. On note  $-a$  l'accélération négative liée au freinage. L'arrêt intervient au bout d'une durée  $\Delta t$ , au bout de laquelle la vitesse est donc nulle :  $0 = V_0 - a\Delta t \Leftrightarrow a\Delta t = V_0$ . La distance parcourue s'écrit  $d_a = -\frac{1}{2}a\Delta t^2 + V_0\Delta t = -\frac{1}{2}V_0\Delta t + V_0\Delta t = \frac{1}{2}V_0\Delta t$ . Ainsi la durée est  $\Delta t = \frac{2d_a}{V_0} = 213 \text{ s} = 3 \text{ min } 33 \text{ s}$  et la

$$\text{décélération } a = \frac{V_0^2}{2d_a} = 0,66 \text{ m.s}^{-2}.$$

6. a) Les moteurs sont « éteints », donc seule la force de frottement s'applique au train :  $-M_T a_1 = -R(V)$

$$\text{donc la décélération est } a_1 = \frac{R(V)}{M_T} = 0,72 \text{ m.s}^{-2}.$$

- b) On intègre deux fois l'équation donnée par le TRC :  $\frac{dV}{dt} = -\frac{C}{M_T} V^2$ . Ceci donne  $V(t) = V_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1}$

$$\text{puis } x(t) = V_0 \tau \ln\left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \text{ avec } \tau = \frac{M_T}{C V_0} = 401 \text{ s} = 6 \text{ min } 41 \text{ s}.$$

On atteint donc une vitesse  $V_1 = 400 \text{ km.h}^{-1}$  en un temps  $t_1$  tel que  $1 + \frac{t_1}{\tau} = \frac{V_0}{V_1}$ , pendant lequel on

$$\text{a parcouru une distance } d_1 = x(t_1) = V_0 \tau \ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right) = 13,2 \text{ km}.$$

7. Le TPC s'écrit maintenant  $\frac{dE_c}{dt} = -4\mathcal{P}_J - R(V)V$ , or  $\frac{dE_c}{dt} = M_T V \frac{dV}{dt} = -M_T V a_2$  en notant  $a_2$  la décélération. Ceci donne  $a_2 = \frac{1}{M_T} \left(\frac{4\mathcal{P}_J}{V} + R(V)\right) = 0,64 \text{ m.s}^{-2}$ .