

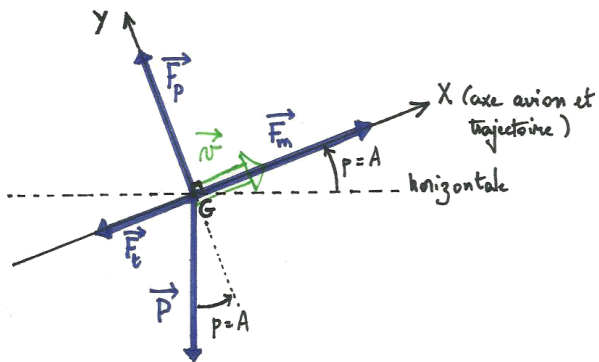
MÉCANIQUE

d'après TSI 2015

I. Mécanique du vol d'un avion

I.1. Vol en montée

1.



2. Le mouvement étant rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre considéré galiléen, la somme des forces est nulle d'après la **seconde loi de Newton** :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{P} = \vec{0} \implies \boxed{F_p = mg \cos A} \text{ (selon GY) et } \boxed{F_m = F_t + mg \sin A} \text{ (selon GX).}$$

(les symboles sans flèches sont définis comme des normes dans l'énoncé).

3. La première projection (GY) conduit à la vitesse en norme : $v = \sqrt{\frac{2mg \cos A}{\rho S C_p}}$.

4. Des deux équations on tire $F_m = mg \cos A \left(\frac{C_t}{C_p} + \tan A \right)$.

D'autre part $\mathcal{P}_m = F_m v$, donc $\boxed{\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0} (\cos A)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{C_p}{C_t} \tan A \right)}$ avec $\mathcal{P}_{m0} = \frac{C_t}{C_p} \sqrt{\frac{2m^3 g^3}{\rho S C_p}}$. En effet on retrouve bien $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}$ pour $A = 0$. On obtient $\mathcal{P}_m = 20 \text{ kW}$.

5. En linéarisant, on obtient $\mathcal{P}_{\max} \approx \mathcal{P}_{m0} (1 + \frac{C_p}{C_t} A)$ d'où $\boxed{A \approx \frac{C_t}{C_p} \left(\frac{\mathcal{P}_{\max}}{\mathcal{P}_{m0}} - 1 \right) = 0,050 \text{ rad} = 2,9^\circ}$.

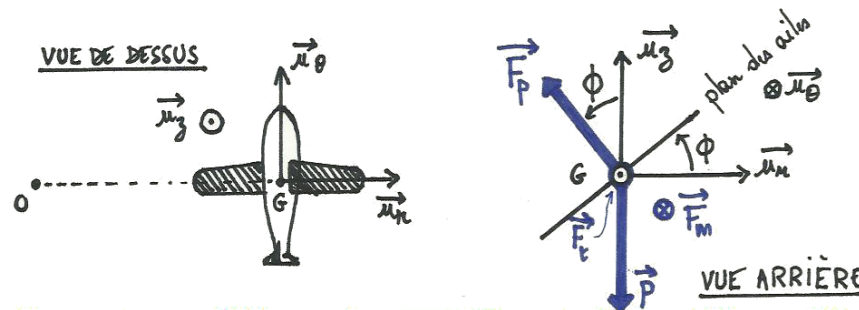
6. Par projection, $v_z = v \sin A$ d'où $\boxed{v_z = \sqrt{\frac{2mg \cos A}{\rho S C_p}} \sin A = 1,3 \text{ m.s}^{-1}}$.

Remarque : cette valeur semble étonnamment faible...

7. On obtient $\boxed{\eta = \frac{F_p}{mg} = \cos A} = 1,0$. Lorsque l'avion vole quasi horizontalement, le poids est quasi intégralement supporté par la portance.

I.2. Vol en virage

8. On suppose que le cercle est centré en l'origine O .



9. Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération vaut $-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$. Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit donc maintenant $\boxed{\vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{P} = -m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r}$.

10. On projette cette équation le long des trois vecteurs de la base cylindrique :

$$(\vec{u}_r) : F_p \sin \Phi = m \frac{v^2}{R}, \quad (\vec{u}_\theta) : F_m = F_t \text{ et } (\vec{u}_z) : F_p \cos \Phi = mg.$$

En faisant le quotient de la première et la dernière équation, on obtient $\boxed{R = \frac{v^2}{g \tan \Phi}}$.

11. Cette fois on a $\boxed{\eta = \frac{F_p}{mg} = \frac{1}{\cos \Phi}}$.

12. On a donc un angle maximal Φ_{\max} tel que $\cos \Phi_{\max} = \frac{1}{\eta_{\max}}$, donc un rayon minimal $R_{\min} = \frac{v^2}{g \tan \Phi_{\max}}$.

Comme $\tan \Phi_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \Phi_{\max}} - 1}$, on obtient finalement $\boxed{R_{\min} = \frac{v^2}{g \sqrt{\eta_{\max}^2 - 1}}}$.

II. Étude mécanique d'un accéléromètre

Mise en équation

13. $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -k(\ell_1 - \ell_0) \vec{u}_x + k(\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_x = -k(\ell_1 - \ell_2) \vec{u}_x$. Si $X = 0$, les ressorts ont une longueur $\ell_1 = \ell_2 = \frac{L}{2} - \frac{d}{2}$, en notant d la distance entre les points d'attache sur la masse mobile. Donc plus généralement on a $\ell_1 = \frac{L}{2} - \frac{d}{2} + X$ et $\ell_2 = \frac{L}{2} - \frac{d}{2} - X$. Finalement $\ell_1 - \ell_2 = 2X$ et donc $\boxed{\vec{T} = -2k X \vec{u}_x}$.

14. On se place dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} , supposé galiléen. Le vecteur position du centre d'inertie de la masse est repérée par $\vec{OC} = (x_B + X) \vec{u}_x + z_C \vec{u}_z$, avec $z_C = \text{constante}$. Donc $\vec{a}_{C/\mathcal{R}} = (\ddot{x}_B + \ddot{X}) \vec{u}_x = \vec{a} + \ddot{X} \vec{u}_x$. Par ailleurs, $\vec{F}_f = -2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B) \vec{u}_x = -2f \dot{X} \vec{u}_x$.

En l'absence de frottements secs, la réaction du support est normale et donc compense le poids car le mouvement est horizontal : $-mg \vec{u}_z + \vec{N} = \vec{0}$.

Ceci conduit selon \vec{u}_x à

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = -a} \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}} \text{ et } \boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{\sqrt{2f}}}.$$

15. ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur, c'est-à-dire la pulsation du **régime libre harmonique** (en l'absence de frottements).

Q est le **facteur de qualité** de l'oscillateur, qui représente :

- i) la **propension à préserver son énergie** en régime libre, mais aussi
- ii) la **propension à résonner** au voisinage de la pulsation ω_0 en régime sinusoïdal forcé.

On a $[\omega_0] = \text{T}^{-1}$ et $[Q] = 1$.

Étude de la réponse harmonique

16. L'équation différentielle est **linéaire à coefficients constants** donc la réponse à un forçage sinusoïdal est sinusoïdale de même pulsation, mais déphasée : $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

17. Posons $\underline{a} = \underline{a}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{a}_m = a_m$, et $\underline{X} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$. Puis on passe l'équation différentielle en complexes :

$$(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{X} = -\underline{a} \implies \underline{X}_m = \frac{-\underline{a}_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

18. On a donc $\underline{H} = -\frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Donc $\underline{H}_{x \rightarrow 0} \sim -1$ et $\underline{H}_{x \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{x^2}$.

Ainsi, pour $f \ll f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$, on a $X \approx -\frac{a}{\omega_0^2}$.

19. Le gain vaut $|\underline{H}| = \left((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$. Par dérivation, on trouve que cette fonction admet un maxi-

mum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui est le cas ($Q \approx 5$), en la fréquence $f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Le gain vaut alors

$$|\underline{H}|(f_r) = Q \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

20. On obtient $f_0 = f_r \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 5,6 \text{ kHz}$ et $|\underline{H}|(f_r) \approx 5,0$.

L'accéléromètre doit fournir un signal représentatif des accélérations subies. Donc on souhaite l'utiliser dans le domaine des basses fréquences $f \ll f_r \approx f_0$, c'est-à-dire $f \lesssim 500 \text{ Hz}$, de telle sorte que **son gain soit approximativement indépendant de la fréquence**.

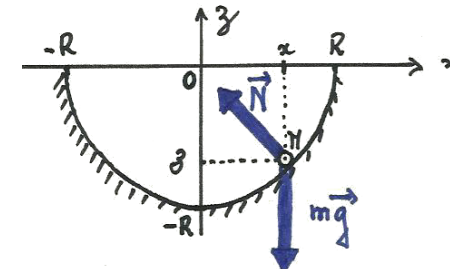
21. Une accélération constante correspond à un signal de fréquence nulle. Donc on considère le gain statique :

$$X_m = \frac{g}{\omega_0^2}, \text{ ce qui conduit à } X_m = \frac{g}{4\pi^2 f_r^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) = 8 \times 10^{-9} \text{ m.}$$

Ce déplacement est extrêmement faible, ce qui implique des techniques de conception mécanique nano-métriques.

III. BONUS

22.



On note Oxz le plan du mouvement, avec l'axe vertical Oz dirigé vers le haut. On place le centre du bol à l'origine, donc son équation coïncide avec celle de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, dont on considère la section plane par $y = 0$. Donc le fond du bol est repéré dans Oxz par l'équation $z = f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Cette relation élimine un degré de liberté, il n'en restera donc qu'un seul : choisissons x .

Le système étant soumis uniquement à son poids et à la réaction normale du bol, il est **conservatif**, avec pour énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}m(1 + \frac{\dot{z}^2}{\dot{x}^2})\dot{x}^2 + mgf(x) = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2 + mgf(x)$$

La **position d'équilibre stable** correspond à z minimal, donc à $x = 0$ et $z = -R$ (on vérifie bien que $f'(0) = 0$). On développe l'énergie mécanique au voisinage de cette position $x = 0$ au premier ordre non nul en x (et \dot{x}) :

$$E_m \approx \frac{1}{2}m(1 + f'(0)^2)\dot{x}^2 + mg \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgR + \frac{mg}{2R}x^2$$

car $f'(0) = 0$ et $f''(x) = \frac{R^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Remarque : on peut aussi effectuer un développement limité de $E_p(x)$ en utilisant les D.L. usuels, à savoir ici $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ au voisinage de zéro avec $\varepsilon = -\frac{x^2}{R^2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

Comme $E_m = \text{constante}$, on obtient l'équation du mouvement en dérivant par rapport au temps puis en simplifiant par \dot{x} :

$$m\ddot{x} + \frac{mg}{R}x = 0 \iff \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

La période des petites oscillations est donc $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

Remarque : on pourrait ici exprimer le problème plus simplement en coordonnées polaires car le mouvement est circulaire (avec $\theta = (-\vec{u}_z; \vec{u}_x)$) :

$$z = -R \cos \theta \text{ et } \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ donc } E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta) \text{ avec } E_p(\theta) = -mgR \cos \theta.$$

Ceci conduit à l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.

Ici l'approche choisie en coordonnées cartésiennes a le mérite d'être générale c'est-à-dire d'être adaptée à l'étude d'un profil de forme quelconque (pas forcément sphérique).

23. Il y a trois paramètres physiques dont dépend le système physique décrit : m , g et R . On cherche l'expression de T_0 sous la forme $T_0 = k m^\alpha g^\beta R^\gamma$, où $k > 0$ et α , β et γ sont des constantes. Par analyse dimensionnelle on obtient :

$$[T_0] = \text{T} = \text{M}^\alpha (\text{L} \cdot \text{T}^{-2})^\beta \text{L}^\gamma = \text{M}^\alpha \text{L}^{\beta+\gamma} \text{T}^{-2\beta}$$

Par identification des puissances, on obtient $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. D'où finalement une loi du type

$$T_0 = k \sqrt{\frac{R}{g}}$$