

MÉCANIQUE

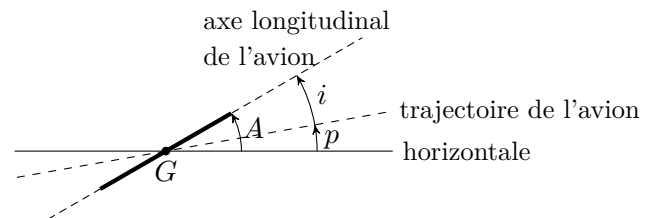
CALCULATRICES AUTORISÉES

Les trois parties sont indépendantes.

I. Mécanique du vol d'un avion

On étudie différentes phases du vol d'un avion, en l'absence de vent, dans le référentiel terrestre (\mathcal{R}) supposé galiléen auquel on associe un système d'axes cartésien dont (Oz) constitue la verticale ascendante. La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés dans la figure ci-dessous :

- la *pente* p , angle de l'horizontale vers la trajectoire de l'avion ;
- l'*assiette* A , angle de l'horizontale vers l'axe longitudinal de l'avion ;
- l'*incidence* i , angle de la trajectoire de l'avion vers son axe longitudinal.



Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre d'inertie G de l'avion, de masse $m = 2,3 \times 10^3$ kg, soumis aux forces suivantes :

- son poids \vec{P} ;
- la *force de traction* \vec{F}_m de l'hélice, entraînée par le moteur, dont la direction est celle de l'axe longitudinal de l'avion ;
- la résultante des forces aérodynamiques, contenue dans le plan de symétrie de l'avion, décomposée en *portance* \vec{F}_p et *traînée* \vec{F}_t :
 - la portance, perpendiculaire à la trajectoire de l'avion, de norme $F_p = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_p$;
 - la traînée, de même direction que la trajectoire mais s'opposant au mouvement de l'avion, de norme $F_t = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_t$;

où $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'air supposée constante et égale à celle mesurée au niveau de la mer, $S = 220 \text{ m}^2$ est l'aire de la surface des ailes de l'avion projetée sur le plan horizontal et v est la vitesse de l'avion par rapport à l'air.

Les coefficients sans dimension C_p et C_t ne dépendent que de l'incidence i . Pour une incidence nulle ($i = 0^\circ$), ces coefficients vérifient : $C_p = 0,24$ et $C_t = 0,008$.

Lors de l'étude du mouvement de l'avion dans différentes configurations, on évalue les efforts mécaniques subis par la structure en déterminant le *facteur de charge* η défini comme le rapport de la norme de la portance sur la norme du poids. Compte tenu de la résistance des matériaux, la conception mécanique de la structure impose une borne supérieure η_{\max} au facteur de charge de l'ordre de 2.

L'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

I.1. Vol en montée

Après avoir quitté le sol, l'avion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme en montée avec une pente p à incidence nulle $i = 0$. Le pilote impose au moteur de l'avion une puissance constante \mathcal{P}_m .

1. Faire un schéma de la configuration de vol en y représentant les forces.
2. Déterminer la relation vectorielle qui lie les forces s'exerçant sur l'avion puis projeter cette relation sur l'axe longitudinal de l'avion et sur l'axe qui lui est perpendiculaire.
3. En déduire la relation liant la vitesse v de l'avion à l'assiette A , au poids, et à ρ , S et C_p .

4. Exprimer la force $F_m = \|\vec{F}_m\|$ puis en déduire la puissance \mathcal{P}_m du moteur en fonction de l'assiette A et des constantes du problème. On introduira notamment dans le résultat la valeur \mathcal{P}_{m0} de la puissance pour $A = 0$, dont on donnera l'expression en fonction des données du problème. Calculer numériquement \mathcal{P}_{m0} .
5. Le pilote impose une puissance du moteur égale à sa valeur maximale $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{\max} = 50 \text{ kW}$. Linéariser l'expression de \mathcal{P}_m en fonction de A sachant que l'assiette ne dépasse généralement pas 10° . En déduire la valeur numérique de l'assiette A .
Rappel : pour θ suffisamment petit, on a $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.
6. Déterminer la relation liant la vitesse ascensionnelle v_z de l'avion à l'assiette A . Calculer sa valeur numérique.
7. Déterminer l'expression du facteur de charge η en montée en fonction de l'assiette A . Commenter.

I.2. Vol en virage

L'avion effectue maintenant un virage circulaire de rayon R en palier ($p = 0^\circ$), avec une incidence nulle ($i = 0^\circ$) et à vitesse v constante supposée connue. Pour réaliser ce virage, le pilote incline l'avion d'un angle ϕ (le plan moyen des ailes est incliné de ϕ par rapport au plan horizontal).

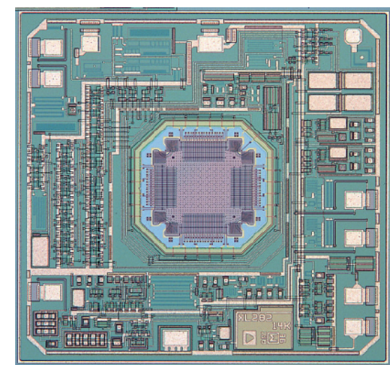
8. L'avion étant incliné pour effectuer le virage, faire le schéma de la configuration de vol en vue arrière en y représentant les forces. On introduira la base cylindro-polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
9. Déterminer la relation vectorielle qui lie les forces s'exerçant sur l'avion.
10. Exprimer le rayon R du virage en fonction de la vitesse v , de l'angle ϕ et de g .
11. Déterminer l'expression du facteur de charge η en fonction de ϕ .
12. La conception structurale de l'avion impose une borne supérieure au facteur de charge η_{\max} . En déduire l'expression du rayon minimal R_{\min} du virage que le pilote peut faire prendre à l'avion en toute sécurité.

II. Étude mécanique d'un accéléromètre

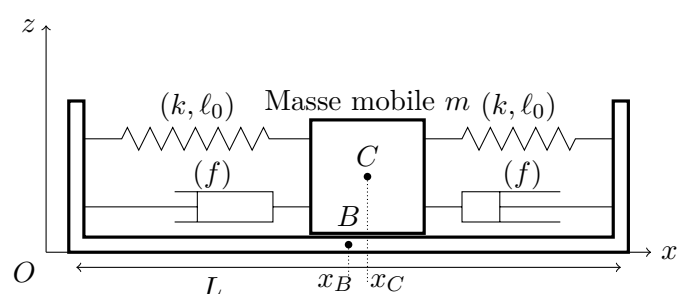
La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des capteurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques embarqués. La plupart des accéléromètres à MEMS permettent de mesurer les accélérations suivant deux axes. En aéronautique, ils sont utilisés en tant que tels dans les avions soumis à de fortes contraintes, avions de chasse ou de voltige, et couplés à des gyromètres ils entrent dans la composition de centrales à inertie.

On limite l'étude à la modélisation du fonctionnement d'un accéléromètre à un seul axe. Un accéléromètre est modélisé par un système masse-ressorts amorti, dont le schéma de principe est représenté sur la figure ci-dessous. On suppose que les déplacements ne s'effectuent que selon l'axe Ox horizontal.

L'accéléromètre se compose d'une masse mobile m , assimilée à un point matériel C , astreinte à se déplacer sans frottements secs selon l'axe horizontal Ox . Le boîtier rigide de l'accéléromètre, de longueur L selon l'axe Ox , de centre B se déplace dans le référentiel d'étude terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. On note \vec{a} son accélération dans ce référentiel, qu'on écrira $\vec{a} = a\vec{u}_x$.



Photographie d'un accéléromètre deux axes : le capteur MEMS est situé au centre (source Analog Devices)



On note à un instant t quelconque, x_C la position de la masse mobile en mouvement, x_B la position du centre du boîtier et $X = x_C - x_B$ la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier. Lorsque le boîtier de l'accéléromètre est au repos, la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier vérifie $X = 0$. Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse mobile quitte la position définie précédemment.

La masse mobile est soumise :

- aux forces de rappel \vec{T}_1 et \vec{T}_2 exercées par deux ressorts identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ;
- à des forces de frottement visqueux dont la résultante est proportionnelle à la vitesse relative de la masse mobile par rapport au boîtier $\vec{F}_f = -2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)\vec{u}_x$ où f est le coefficient de frottement visqueux ;
- au poids \vec{P} ;
- à la réaction du boîtier \vec{R} .

Mise en équation

13. Montrer que la résultante des forces de rappel exercées par les deux ressorts s'écrit $\vec{T} = -2kX\vec{u}_x$.
14. Montrer que, lorsque le boîtier subit une accélération, l'équation différentielle vérifiée par l'élongation X s'écrit :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a$$

avec ω_0 et Q deux constantes que l'on exprimera en fonction de k , m et f .

15. Quelle est la signification physique de ω_0 et Q ? Quelles sont les dimensions et les unités de ces deux grandeurs ?

Étude de la réponse harmonique

On recherche maintenant les conditions pour lesquelles l'élongation X est directement proportionnelle à l'accélération a du boîtier. Pour cela, on étudie la réponse du capteur en régime harmonique établi.

16. La grandeur d'entrée du capteur étant l'accélération $a(t) = a_m \cos(\omega t)$, sous quelle forme mathématique doit-on rechercher la grandeur de sortie $X(t)$?
17. Établir la relation entre l'amplitude complexe de l'élongation \underline{X}_m et celle de l'accélération \underline{a}_m .
18. Après avoir étudié le comportement asymptotique de la quantité $\underline{H} = \frac{\underline{X}_m}{\underline{a}_m/\omega_0^2}$, montrer qu'il existe un domaine de fréquences, que l'on précisera, pour lequel on peut considérer que l'élongation X est directement proportionnelle à l'accélération a . Donner cette relation de proportionnalité.

La fréquence typique de résonance mécanique du capteur d'un accéléromètre à MEMS est de l'ordre de 5,5 kHz et son facteur de qualité est voisin de 5.

19. Déterminer l'expression du gain $|\underline{H}| = \frac{X_m}{a_m/\omega_0^2}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et Q .
En déduire qu'il se produit une résonance à une fréquence f_r à déterminer. Exprimer le gain à la résonance $|\underline{H}|(f_r)$.
20. Calculer les valeurs numériques de $|\underline{H}|(f_r)$ et de la pulsation propre f_0 .
Dans quel domaine de fréquences est-il pertinent d'utiliser cet accéléromètre ? Justifier.
21. Déterminer la valeur numérique de l'amplitude finale du déplacement de la masse mobile pour une accélération constante de « 1g » ($a = g$), correspondant à l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre. Commenter le résultat.

III. BONUS

On considère une bille de masse m en mouvement sans frottements au fond d'un bol sphérique de rayon R .

22. Calculer la période de ses petites oscillations au voisinage du fond, si son mouvement est plan et passe par le fond. On notera g l'intensité du champ de pesanteur.
23. Retrouver ce résultat par une analyse dimensionnelle.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *