

ONDES ET MÉCANIQUE

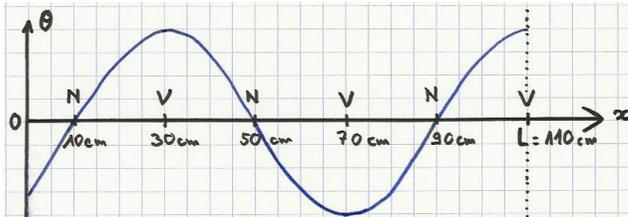
I. Ondes de torsion sur un ondoscope

1. a) La forme générale est $\theta(x, t) = B \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$ où B est une constante à déterminer.
- b) En $x = L$ on doit avoir un maximum d'amplitude : $\frac{d\theta}{dx}(x = L) = -Bk \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL + \psi) = 0$ pour tout t . D'où $kL + \psi = 0 [\pi]$.
Par ailleurs on impose $\theta(x = L, t) = B \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi)$ qui doit être d'amplitude $2\theta_0$, donc $2\theta_0 = B \cos(kL + \psi) = B \cos(0 [\pi]) = \pm B$. Or $\theta_0 > 0$ donc en fait $kL + \psi = 0$ et $B = 2\theta_0$.
Finalement $\theta(x, t) = 2\theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(k(x - L))$. La valeur de φ sera déterminée ensuite en fonction du forçage en $x = 0$.
- c) En utilisant la formule donnée dans l'énoncé, on obtient après inversion

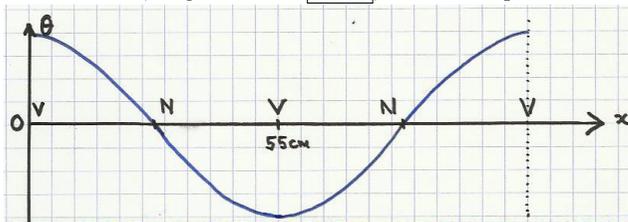
$$\theta(x, t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi - kx + kL) + \theta_0 \cos(\omega t + \varphi + kx - kL),$$

c'est-à-dire une somme de **deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude** se propageant en **sens contraire**.

2. a) On a $c = \lambda f = 1,6 \text{ m.s}^{-1}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 7,9 \text{ rad.m}^{-1}$.
- b) En $x = 0$ on impose $A \cos(\omega t) = 2\theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(-kL) \forall t$ avec $\cos(-kL) < 0$. Donc ceci conduit à $\varphi = \pi$ et $A = 2\theta_0 \left| \cos\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) \right| = 7,1^\circ$.
- c) Les points remarquables sont les ventres et les nœuds, qui sont espacés de $\frac{\lambda}{4} = 20 \text{ cm}$. En $x = L = 110 \text{ cm}$ il s'agit d'un ventre, qui vibre en opposition de phase avec le ventre précédent situé en $x = 70 \text{ cm}$. Entre les deux on a un nœud en $x = 90 \text{ cm}$ c'est-à-dire une absence de vibrations.



- d) a) Comme $\lambda = \frac{c}{f}$, diminuer f fait augmenter λ . D'après le schéma précédent il faut ramener le premier ventre en $x = 0$, ce qui conduit à $\lambda = L$, avec un unique ventre au milieu de l'ondoscope.



- b) D'où $f_0 = \frac{c}{L} = 1,5 \text{ Hz}$.
- c) On re-divise la fréquence par 2 donc on multiplie la longueur d'onde par 2, ce qui ramène en $x = 0$ le ventre situé au milieu, avec $\lambda = 2L$.
- d) Il y a alors un unique nœud au milieu de l'ondoscope en $x = 55 \text{ cm}$.

II. Détection d'une exoplanète avec l'interféromètre de Bracewell

1. L'onde plane incidente se propage selon l'axe Oz (son vecteur d'onde est selon Oz), donc les plans d'onde sont orthogonaux à Oz . Par conséquent S_1 et S_2 sont dans un même plan d'onde et donc les vibrations de s en ces deux points sont en phase.
2. En l'absence de lentille (figure d'interférence « à l'infini »), les deux ondes sphériques issues de S_1 et S_2 s'écriraient $s_1(M, t) = A \cos(\omega t - kS_1M)$ et $s_2(M, t) = A \cos(\omega t - kS_2M)$ en posant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
Or phénomène d'interférence, chacune de ces ondes a une intensité $I_0 = A^2 < \cos^2 > = \frac{A^2}{2}$. Ici les deux ondes sont synchrones (et cohérentes, cf la note de bas de page dans l'énoncé) donc interfèrent. On obtient l'intensité

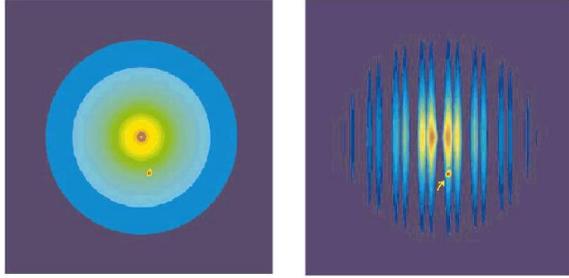
$$I(M) = < (A \cos(\omega t - kS_1M) + A \cos(\omega t - kS_2M))^2 > \\ = A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + < \cos(2\omega t - k(S_1M + S_2M)) + \cos(k(S_2M - S_1M)) > \right) \text{ d'où}$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \right) \text{ avec } \delta = S_2M - S_1M.$$

3. D'après le schéma de l'énoncé, on a $\delta = S_2M$ si $\theta > 0$, d'où $\delta = a \sin \theta$. Ce résultat reste valable si $\theta < 0$. Comme l'image par la lentille est située dans le plan focal sur le rayon parallèle passant par l'origine (en pointillé dans l'énoncé), on a $\tan \theta = \frac{x}{f}$. Dans les conditions de Gauss on a $\sin \theta \approx \tan \theta$ donc finalement $\delta \approx \frac{ax}{f}$.
4. Les franges d'interférence correspondent à des lieux $\delta = \text{constante}$ donc ce sont approximativement des droites parallèles $x = \text{constante}$ dans le cadre des conditions de Gauss¹.
Entre deux franges brillantes consécutives, la différence de marche varie de $\Delta\delta = \frac{a}{f} = \lambda$ d'où $i = \frac{\lambda f'}{a}$.
En $x = 0$ on a $\delta = 0$ donc les ondes sont en phase et on observe une frange brillante.
5. On a $I_{\max} = 4I_0$ et $I_{\min} = 0$ donc $C = 1$.
Remarque : Le contraste est maximal et ceci provient du fait que les deux ondes ont des amplitudes égales, comme dans le cas des battements.
6. Il faut ajouter un déphasage de π dans la phase de s_1 , ce qui revient à réduire la distance parcourue de $\frac{\lambda}{2}$ en provenance de S_1 car : $\omega t - kS_1M + \pi = \omega t - kS_1M + k\frac{\lambda}{2}$. D'où $\delta = S_2M - (S_1M - \frac{\lambda}{2})$ donc $\delta(x) = \frac{ax}{f} + \frac{\lambda}{2}$.
Maintenant $\delta(x = 0) = \frac{\lambda}{2}$ donc les deux ondes sont en opposition de phase au centre de la figure. On observe alors une frange sombre en $x = 0$.
7. L'onde plane issue de la planète a un vecteur d'onde incliné d'un angle α par rapport à l'axe Oz . En amont des trous d'Young, le rayon qui arrive en S_2 a donc parcouru une distance supplémentaire $a \sin \alpha$ par rapport à celui qui arrive en S_1 . Donc il existe maintenant un déphasage entre S_1 et S_2 qui vaut $\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} a \sin \alpha$.

8. Finalement on a donc $\delta_P(x) = \frac{ax}{f} + \frac{\lambda}{2} + a \sin \alpha$.
On obtient une frange brillante en $x = 0$ si $\delta_P(x = 0) = \frac{\lambda}{2} + a \sin \alpha = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, d'où la condition $a \sin \alpha = (p - \frac{1}{2})\lambda$. La plus petite valeur de a pour laquelle cela est obtenu correspond donc à $p = 1$.
9. Si a est ajusté de façon à remplir la condition précédente, les deux figures d'interférences superposées issues respectivement de l'étoile et de la planète sont exactement décalées d'un demi-interfrange $\frac{\lambda}{2}$. Ainsi, la lumière issue de la planète est visible là où celle issue de l'étoile est éteinte.
En pratique les trous d'Young sont remplacés par les deux télescopes, dont on ajuste (si possible) la distance pour améliorer le contraste au voisinage de l'image de la planète en atténuant la luminosité issue de l'étoile par interférence destructive. On obtient une image qui peut ressembler par exemple à la figure de droite ci-dessous (l'image de gauche représente ce que l'on obtient avec un seul télescope).

1. Plus généralement ce sont en fait des hyperboles.



III. Pilotage en « speeder »

- La période spatiale correspond à l'évitement de deux cheminées consécutives, donc $\lambda = 2L = 100 \text{ m}$.
La trajectoire sinusoïdale a pour équation intrinsèque : $y = y_m \sin(2\pi \frac{x}{\lambda}) = y_m \sin(\pi \frac{x}{L})$. L'utilisation du sinus permet de bien respecter les conditions initiales : $y(x=0) = 0$ et $\frac{dy}{dx}(x=0) > 0$.
- On a $\dot{x} = v_0 = \text{cte}$ donc en intégrant entre $t = 0$ et $t > 0$ quelconque on obtient $x(t) - x(0) = x(t) = v_0 t$.
Par ailleurs, $6L = x(t_0) = v_0 t_0$ d'où $v_0 = \frac{6L}{t_0} = 50 \text{ m.s}^{-1} = 180 \text{ km.h}^{-1}$.
- On injecte la loi horaire $x(t)$ dans l'équation intrinsèque de la trajectoire, ce qui donne $y(t) = y_m \sin(2\pi \frac{v_0}{\lambda} t)$ avec $\lambda = 2L$.
Ensuite $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$ d'où $\vec{v}(t) = v_0 \vec{e}_x + \pi \frac{y_m}{L} v_0 \cos(\pi \frac{v_0}{L} t) \vec{e}_y$.
- On a $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ d'où $v(t) = \sqrt{v_0^2 + \pi^2 \frac{y_m^2}{L^2} v_0^2 \cos^2(\pi \frac{v_0}{L} t)}$.
La vitesse est **maximale** en norme lorsque $\cos^2(\pi \frac{v_0}{L} t) = 1$ donc lorsque $t = t_p = p \frac{L}{v_0}$ avec $p \in \mathbb{N}$. On atteint donc la vitesse maximale $v_{\text{max}} = v_0 \sqrt{1 + \pi^2 \frac{y_m^2}{L^2}} = 73 \text{ m.s}^{-1}$ en les positions $x_p = v_0 t_p = pL$.
La vitesse est **minimale** en norme lorsque $\cos^2(\pi \frac{v_0}{L} t) = 0$ donc lorsque $t = t_{p+\frac{1}{2}} = (p + \frac{1}{2}) \frac{L}{v_0}$ avec $p \in \mathbb{N}$. On atteint donc la vitesse minimale $v_{\text{min}} = v_0 = 50 \text{ m.s}^{-1}$ en les positions $x_{p+\frac{1}{2}} = (p + \frac{1}{2})L$.
- On a $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$ donc $\vec{a}(t) = -\pi^2 y_m \frac{v_0^2}{L^2} \sin(\pi \frac{v_0}{L} t) \vec{e}_y$.
En norme, on a $a(t) = \pi^2 y_m \frac{v_0^2}{L^2} |\cos(\pi \frac{v_0}{L} t)|$ d'où $a_{\text{max}} = \pi^2 y_m \frac{v_0^2}{L^2} = 1,7 \times 10^2 \text{ m.s}^{-2} > 10g$. Cette accélération est largement supérieure à ce que le corps humain moyen est capable de supporter. N'est pas un Jedi qui veut.

IV. Limite d'adhérence sur un tourne-disque

- Un référentiel est considéré galiléen si **tout point matériel isolé admet un mouvement rectiligne uniforme** (principe d'inertie, ou 1ère loi de Newton). En pratique, cela doit être vérifié pour un point matériel pseudo-isolé (somme des forces nulle, d'après la seconde loi de Newton ou Principe Fondamental de la Dynamique, PFD).
Ici le référentiel terrestre peut être considéré galiléen car la vitesse de rotation du disque est très grande devant celle de la Terre dans le référentiel géocentrique, et a fortiori devant la vitesse angulaire de la Terre dans le référentiel de Copernic. Autrement dit, on peut considérer que **la Terre n'a pas bougé dans le système solaire pendant la durée de l'expérience** qui est très courte.
- On note $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base cartésienne orthonormée fixe dans le référentiel terrestre noté \mathcal{R} .
On définit l'angle $\theta = (\vec{u}_x; \vec{OM})$.
On définit la base polaire associée au disque tournant par $\vec{u}_r = \frac{1}{r} \vec{OM}$, et \vec{u}_θ orthogonal à \vec{u}_r dans le plan horizontal Oxy orienté dans le sens des θ croissant.
- On a alors $\vec{OM} = r \vec{u}_r$.
Comme le palet ne glisse pas sur le disque, on a $r = \text{cte}$ et $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$. D'où en dérivant par rapport à \mathcal{R} : $\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{u}_r$.
- Le PFD appliqué dans \mathcal{R} s'écrit : $m\vec{a} = -mg\vec{u}_z + \vec{N} + \vec{T}$.
Le mouvement étant dans le plan horizontal, on obtient par projection selon \vec{u}_z que $\vec{N} = mg\vec{u}_z$.
Par différence on en déduit $\vec{T} = m\vec{a} = -mr\omega^2 \vec{u}_r$.
Remarque : on peut interpréter cette égalité en se plaçant dans le référentiel non galiléen du disque tournant. La réaction tangentielle compense la « force centrifuge » (cf SPE PC).
- La loi de Coulomb du frottement statique s'écrit dans le cas de non glissement : $\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$ donc $mr\omega^2 \leq fmg \iff f \geq f_{\text{lim}} = \frac{r\omega^2}{g}$. L'égalité est établie dans le cas de glissement. **Si $f < f_{\text{lim}}$, alors l'état de non glissement n'est pas possible** (donc la vitesse angulaire ω est trop grande).
- On a $\omega = 33 \text{ tours.min}^{-1} = 3,5 \text{ rad.s}^{-1}$.
Le critère de non glissement est le plus contraignant (f_{lim} le plus élevé) en $r = R$. On obtient alors $f_{\text{lim}} = 0,18 < f$. **L'hypothèse de non glissement était donc valable quelque soit la position sur le disque.**

V. Saut record de Félix Baumgartner

1. En n'oubliant pas de convertir en m.s^{-1} , on obtient $\mathcal{M} = \frac{v_M}{c} = 1,2$. Le sauteur a donc dépassé la vitesse du son...!
2. En supposant la pesanteur uniforme sur la trajectoire, le PFD appliqué au système parachutiste s'écrit dans le référentiel terrestre en l'absence de frottements : $m\ddot{z} = -mg$ (en choisissant un axe vertical ascendant). En intégrant deux fois entre $t = 0$ et $t > 0$ avec $z(t = 0) = z_0$ et $\dot{z}(t = 0) = 0$, on obtient la loi horaire $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$. La chute se termine à l'instant $t_{\text{libre}} = \sqrt{\frac{2z_0}{g}} = 89 \text{ s} = 1 \text{ min } 29 \text{ s}$.

La vitesse au sol est alors $v_{\text{sol}} = \sqrt{2gz_0} = 875 \text{ m.s}^{-1}$.

3. On a $\|\vec{v}\| = -\dot{z} > 0$. Le PFD s'écrit selon le vecteur \vec{u}_z : $m\ddot{z} = -mg - \frac{1}{2}\rho_0 e^{-\beta z} CS (-\dot{z}) \dot{z}$. D'où après division par m : $\ddot{z} - \alpha e^{-\beta z} \dot{z}^2 = -g$ avec $\alpha = \frac{\rho_0 CS}{2m}$.
4. Supposons qu'une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}} = \dot{z}_{\text{lim}} \vec{u}_z$ soit atteinte. Comme elle est par définition constante, on obtient $\ddot{z} = 0$ d'où $\alpha e^{-\beta z} \dot{z}_{\text{lim}}^2 = g$, d'où $z = \text{cte}$ d'où $\dot{z}_{\text{lim}} = 0$ (la vitesse limite serait nulle) d'où $g = 0$ ce qui est absurde. Par conséquent cette équation différentielle n'admet pas de solution à vitesse constante, il n'y a donc **pas de vitesse limite**.
5. D'après la question précédente, la vitesse va nécessairement atteindre une valeur maximale (en norme), puis décroître. À l'instant t_M où la vitesse est maximale on a $\ddot{z}(t_M) = 0$, donc l'égalité précédente est valable : $\alpha e^{-\beta z_M} v_M^2 = g$ d'où $z_M = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha v_M^2}{g}\right) = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\rho_0 CS v_M^2}{2mg}\right) = 28 \text{ km}$.
6. On réitère le raisonnement de la question 4, mais avec une masse volumique indépendante de z qui vaut ρ_0 : $\alpha v_{\text{lim}}^2 = g$ d'où $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_0 CS}} = 50 \text{ m.s}^{-1} \approx 1,8 \times 10^2 \text{ km.h}^{-1}$. Cette vitesse est inférieure à celle constatée d'environ 10%, ce qui est logique vu que la masse volumique est surestimée dans ce calcul. En réalité elle ne vaut ρ_0 qu'à la toute fin du saut. Donc la force de frottement est surestimée au cours de la chute.
7. Pendant la chute libre le parachutiste parcourt une altitude $\Delta z = 36529 \text{ m}$, donc $z_P = z_0 - \Delta z = 2516 \text{ m}$. La durée de la chute en parachute est $\Delta t = 9 \text{ min } 3 \text{ s} - 4 \text{ min } 19 \text{ s} = 4 \text{ min } 44 \text{ s}$. La surface « utile » S' déployée par le parachute est très grande devant la surface utile S du parachutiste, ce qui **augmente proportionnellement** la force de frottement via le facteur α . En particulier, comme v_{lim} varie en $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, si la surface est multipliée par 100, la vitesse limite limite est divisée par 10, ce qui donne $v_{\text{lim}} \sim 5 \text{ m.s}^{-1}$. Ceci est une vitesse acceptable pour atterrir. Si la vitesse limite est atteinte instantanément, on obtient $v_{\text{sol}} = \frac{z_P}{\Delta t} = 8,9 \text{ m.s}^{-1} \approx 32 \text{ km.h}^{-1}$.

8. On note que la pente est infinie au départ car

$$\frac{d\dot{z}}{dz} = \frac{d\dot{z}}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}$$

or la vitesse initiale est nulle et l'accélération initiale est non nulle.

