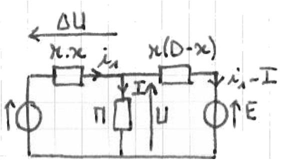
ÉLECTRICITÉ

I. Caténaire de locomotive

1. La résistance d'un conducteur filiforme de longueur ℓ vaut $\frac{\rho\ell}{S}$. Donc $\boxed{r = \dfrac{\rho}{S}}$.

La résistance des rails est négligeable car leur section est grande au regard de celle de la caténaire.



2. a)

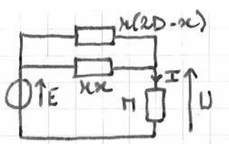
b) On introduit un courant inconnu i_1 (cf schéma) et on applique directement la loi des noeuds sur le schéma. On le détermine en appliquant deux lois de maille : $U = E - rxi_1 = E + r(D-x)(i_1 - I)$ d'où $i_1 = (1 - \frac{x}{D})\, I$ et donc $\boxed{U = E - rx\,(1 - \frac{x}{D})\, I}$.

Remarque : on ne peut pas appliquer la loi des nœuds en terme de potentiel sous sa forme générale donnée dans le cours, car le moteur n'est pas a priori modélisé comme une résistance (maladresse de l'énoncé...). Toutefois on peut l'écrire dans le but d'expliciter le courant I : $I = \frac{E-U}{rx} + \frac{E-U}{r(D-x)}$, ce qui conduit bien au même résultat.

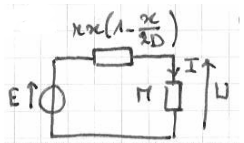
c) D'où $\boxed{\Delta U = rx\,(1 - \frac{x}{D})\, I}$.

d) En dérivant [1] on trouve que ΔU est maximal pour $x = \frac{D}{2}$, ce qui conduit à $\Delta U_{\max} = \frac{1}{4}\, rDI$. Donc $\boxed{D = \dfrac{4\Delta U_{\max}}{rI}} = \underline{4,5\,\text{km}}$.

3. a) Le circuit équivalent est



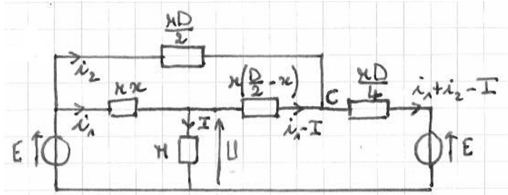
$\Leftrightarrow$



Donc on obtient $\boxed{\Delta U = rx\left(1 - \dfrac{x}{2D}\right) I} = 2Dr\,\frac{x}{2D}\,\left(1 - \frac{x}{2D}\right) I$.

b) Le maximum vaut $\Delta U_{\max} = \frac{1}{2} rDI$ d'où $\boxed{D = \dfrac{2\Delta U_{\max}}{rI}} = \underline{2,3\,\text{km}}$. Ce système est donc moins performant que le précédent.

4. a) Le schéma équivalent est le suivant :



b) Après simplification par rD, on a $\boxed{V_C\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{D}\right)^{-1} + 4 + 2\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{D}\right)^{-1} U + 4E + 2E}$.

1. On reconnaît la fonction parabolique $t(1-t)$ (avec $t = x/D$ ici) qui admet un maximum en $t = 1/2$ de valeur $1/4$. Les résultats suivant s'expriment aussi en fonction de cette parabole, ce qui simplifie les calculs en évitant de dériver.

c) $V_C - U = r\left(\frac{D}{2} - x\right)(I - i_1)$. Or $i_1 = \frac{E-U}{rx}$ d'où $\boxed{V_C = U + r\left(\frac{D}{2} - x\right)\left(I - \frac{E-U}{rx}\right)}$.

En injectant ce résultat dans le précédent, on obtient après multiplication par $\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{D}\right)$:

$$\left(U + r\left(\frac{D}{2} - x\right)\left(I - \frac{E-U}{rx}\right)\right)\left(1 + 6\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{D}\right)\right) = U + 6E\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{D}\right)$$

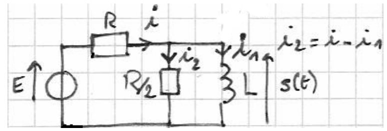
On développe cette expression en rassemblant les termes en U, ce qui conduit après simplification à $U = E - rxI\left(1 - \frac{3x}{2D}\right)$ donc $\boxed{\Delta U = rx\left(1 - \dfrac{3x}{2D}\right) I} = \frac{2D}{3} r\,\frac{3x}{2D}\left(1 - \frac{3x}{2D}\right) I$.

d) On obtient $\Delta U_{\max} = \frac{1}{6}\, rDI$ d'où $\boxed{D = \dfrac{6\Delta U_{\max}}{rI}} = \underline{6,7\,\text{km}}$.

II. Comparaison de deux circuits

II.1. Circuit RL en régime transitoire

1. À l'instant $t = 0^-$, le circuit est en régime stationnaire avec k ouvert. La bobine est équivalente à un fil et donc $\boxed{s(0^-) = 0}$. Elle n'est parcourue par aucun courant donc $i_1(0) = 0$ (doit être continu). Ainsi $i_2(0^-) = i(0^-)$ et de même $i_2(0^+) = i(0^+)$.



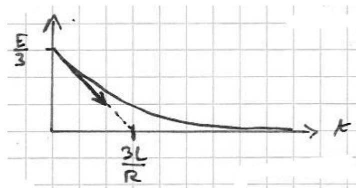
Ceci conduit à $\boxed{i(0^-) = 0}$, et $i(0^+) = \frac{E}{R+R/2}$ donc $\boxed{i(0^+) = \dfrac{2E}{3R}}$ et $\boxed{s(0^+) = \frac{R}{2}\, i_2(0^+) = \dfrac{E}{3}}$. On constate donc que s **et** i **ne sont pas continues en** $t = 0$.

2. Le circuit tend vers un régime permanent stationnaire, donc la bobine sera équivalente à un fil, et $\boxed{s(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$.

3. La petite maille donne $s = \frac{R}{2} i_2$, et de plus $s = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$. Donc on peut remplacer tous les courants en fonction de s dans la seconde maille. Pour $t > 0$ on a

$$E = R(i_1 + i_2) + \frac{R}{2} i_2 = Ri_1 + \frac{3R}{2} i_2 \quad \text{d'où en dérivant} \quad 0 = \frac{R}{L}s + 3\dot{s} \Leftrightarrow \boxed{\tau\dot{s} + s = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{3L}{R}}.$$

4. D'où $s(t) = \lambda\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\lambda = s(0^+)$, ce qui donne $\boxed{s(t) = \dfrac{E}{3}\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{3L}{R}}$.



5. $s(t_0) = \frac{E}{3} \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{t_0 = \dfrac{3L}{R}\,\ln 10}$.

6. $\boxed{L = \dfrac{Rt_0}{3\ln 10}} = \underline{4,3 \times 10^{-4}\,\text{H}}$.

II.2. Un circuit plus complexe en régime transitoire

7. On part des grandeurs qui doivent rester continues : i_1 et i_4. A $t = 0^-$ on est en régime stationnaire donc les bobines équivalent à des fils, et donc $i_2(0^-) = i_4(0) = 0$ et $i(0^-) = i_1(0) = i_3(0^-)$. La loi des mailles en passant par les résistances donne $E = 2Ri_1(0)$ donc $i_1(0) = \frac{E}{2R}$.
A $t = 0^+$ on a toujours $i_3(0^+) = i(0^+)$ car $i_4(0) = 0$, donc la loi des mailles en passant par les résistances donne $E = R(i(0^+) + i(0^+) - i_1(0) + i(0^+)) = 3Ri(0^+) - \frac{E}{2}$, d'où $i(0^+) = \frac{E}{2R}$.

Finalement on a $\boxed{i(0^+) = i_1(0) = i_3(0^+) = \dfrac{E}{2R}}$ et $\boxed{i_2(0^+) = i_4(0) = 0}$. Et comme $s = Ri_3$, on a $\boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{2}}$.

8. En régime stationnaire, les bobines sont assimilées à des fils, qui court-circuitent donc les résistances associées : $\boxed{i_2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$, $\boxed{i_3 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$ et $\boxed{s = Ri_3 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0}$. Par conséquent $E = Ri$, d'où $\boxed{\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty} i_1 = \lim_{t\to\infty} i_4 = \frac{E}{R}}$.

9. **a)** Comme $i_2 = i - i_1$ et $i_3 = i - i_4$, on obtient avec les 2 petites mailles puis en passant par les résistances :

$$i = i_1 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$i = i_4 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

$$\frac{E}{R} = 3i - i_1 - i_4 \qquad (3)$$

b) En formant la combinaison d'équations 3(2)+(3) on obtient

$$\frac{E}{R} = 2i_4 + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} - i_1\,. \qquad (4)$$

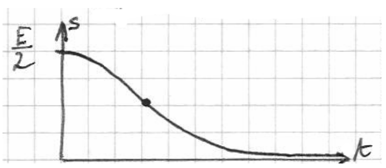
Pour éliminer i_1, on réalise alors la combinaison (4) + $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$(4) + (1) - (2), ce qui donne

$$\frac{E}{R} = i_4 + 4\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t} + 3\frac{L^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}^2 i_4}{\mathrm{d}t^2}\,. \qquad (5)$$

Comme $s = L\frac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t}$, on redérive cette équation pour obtenir sous forme canonique

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{R}{\sqrt{3}L}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{3}}{4}} \approx \underline{0,4}\,.$$

10. L'équation différentielle est sans second membre donc sans solution particulière. Comme $Q < \frac{1}{2}$, on est en présence d'un régime apériodique. En effet le discriminent de l'équation caractéristique vaut $\Delta = \frac{R^2}{L^2} > 0$, d'où les racines $r_+ = -\frac{R}{L}$ et $r_- = -\frac{R}{3L}$, et la forme générale de la solution : $\boxed{s(t) = \lambda\, e^{-\frac{Rt}{L}} + \mu\, e^{-\frac{Rt}{3L}}}$.



11. **a)** En notant que $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i_4}{\mathrm{d}t^2}$, on voit que l'Eq. (5) permet de conclure : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{RE}{3L} - \frac{R^2}{3L}i_4(0) - \frac{4R}{3L}s(0^+)$ d'où $\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{RE}{3L}}$.

b) On obtient le système suivant

$$\begin{cases} s(0^+) = \frac{E}{2} & = \lambda + \mu \\ \frac{3L}{R}\dot{s}(0^+) = E & = -3\lambda - \mu \end{cases} \implies \lambda = -\frac{3E}{4} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{E}{4}\,.$$

Finalement on obtient $\boxed{s(t) = -\frac{E}{4}\left(3\,e^{-\frac{Rt}{L}} + e^{-\frac{Rt}{3L}}\right)}$.

III. Inflammation dans un véhicule à moteur

1. La loi des mailles s'écrit $E = Ri_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_c$ avec $i_1 = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$. Donc en dérivant cette équation puis en passant sous forme canonique on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_1 = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

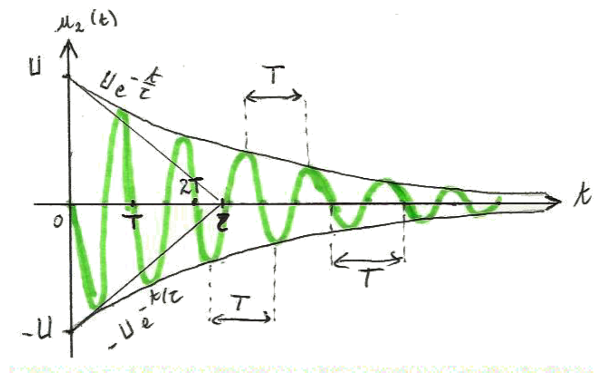
2. Régime libre pseudo-périodique : $\boxed{i_1(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right)}$ avec $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.

3. **a)** Le courant i_1 traverse la bobine donc est continu : $i_1(0^+) = i_1(0^-) = i_1(0)$. A $t = 0^-$ le régime est stationnaire donc la bobine équivaut à un fil et la loi des mailles s'écrit $E = ri_1(0) + 0 + 0$ d'où $\boxed{i_1(0) = \frac{E}{r}}$.

En notant u_L la tension aux bornes de la bobine telle que $u_L = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, la loi des mailles s'écrit à $t = 0^+$: $E = ri_1(0) + u_L(0^+) + u_c(0)$. La tension u_c aux bornes du condensateur est continue, et vaut 0 car il est court-circuité à $t = 0^-$. Cela donne $E = E + u_L(0^+)$ donc $u_L(0^+) = 0$, donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0}$.

b) Les conditions initiales conduisent à $i_1(0^+) = \lambda = \frac{E}{r}$ et $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+) = \mu\omega - \frac{\lambda}{\tau} = 0$ donc $\mu = \frac{E}{r\tau\omega}$. De plus $u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ ce qui conduit à $\boxed{u_2 = -U\,e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega t)}$ en notant $\boxed{U = \frac{ME\omega}{r}\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}$.

c) La tension u_2 est encadrée par deux enveloppes exponentielles symétriques par rapport à 0 : $-U\,e^{-\frac{t}{\tau}} \leq u_2 \leq U\,e^{-\frac{t}{\tau}}$. Les zéros montant (respectivement descendant) sont T-périodiques avec $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (c'est le cas aussi de ses maxima et de ses minima). Enfin $u_2 \underset{t\to 0^+}{\sim} -U\omega t$ donc la courbe commence par décroître.



4. **a)** On note t_m un maximum ou un minimum de u_2, alors $\boxed{\delta = \ln\left(\frac{u_2(t_m)}{u_2(t_m+T)}\right)}$.

b) On a $\sin(\omega(t_m+T)) = \sin(\omega t_m)$ donc $\delta = \ln\left(\frac{e^{-\frac{t_m}{\tau}}}{e^{-\frac{t_m+T}{\tau}}}\right) = \ln(e^{\frac{T}{\tau}}) = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi\omega_0}{\omega 2Q}$ d'où $\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

c) On inverse la relation précédente : $\boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} \approx \frac{\pi}{\delta}} \approx \underline{9,2}$.

Comme $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$ on en déduit $\boxed{C = \frac{L}{Q^2 r^2} \approx \frac{L\delta^2}{\pi^2 r^2}} \approx \underline{4,9\,\mu\mathrm{F}}$.