ÉLECTRICITÉ

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

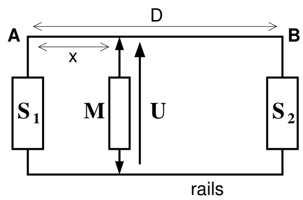
I. Caténaire de locomotive

Une locomotive électrique est alimentée en courant continu. L'alimentation est réalisée par des sous-stations S_j distantes de D. Ces sous-stations relient les rails, portés au potentiel nul, à la caténaire AB (câble conducteur). Chaque source S sera représentée par un générateur de tension E, borne positive du côté de la caténaire.

La motrice M est branchée entre les rails et la caténaire. On supposera que son moteur doit être alimentée par un courant constant I. De plus la caténaire présente une *résistance linéïque* notée r, alors qu'on pourra négliger la résistance des rails. Cela signifie que chaque morceau de caténaire est assimilable à une résistance proportionnelle à sa longueur. Pour les applications numériques, on prendra $r = 5.10^{-5}\ \Omega.\text{m}^{-1}$ et I = 800 A.

1. Rappeler l'expression de r en fonction de la résistivité ρ du métal conducteur et la section S du câble. Pourquoi peut-on négliger la résistance des rails ?

2. On considère une section de ligne de longueur D alimentée par deux stations. On note x la longueur de caténaire séparant la motrice de la sous-station S_1.



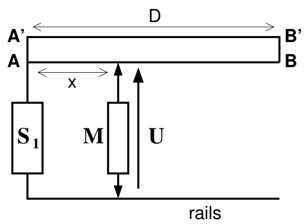
a) Représenter le schéma électrique équivalent à cette section.

b) En utilisant les lois de Kirchhoff, établir l'expression de la tension U aux bornes de la motrice en fonction de E, r, x, D et I (qui sera orienté en convention récepteur par rapport à U).

c) En déduire l'expression de la chute de tension $\Delta U = E - U$ en fonction des mêmes données.

d) Calculer la valeur de la distance D entre les deux sous-stations pour avoir une chute de tension maximale de $\Delta U_{\text{max}} = 45\,\text{V}$.

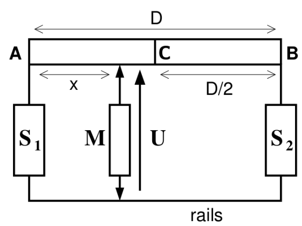
3. Une section de longueur D est maintenant alimentée par une seule station S. La caténaire est constituée de deux fils identiques AB et A'B' de longueur D et de résistance linéïque r, reliés aux extrémités.



a) De nouveau, représenter le schéma équivalent puis établir l'expression de $\Delta U = E - U$ en fonction des mêmes données.

b) Calculer la valeur de la distance D à adopter pour avoir une chute de tension maximale de $\Delta U_{\text{max}} = 45\,\text{V}$.

4. On revient à un système de deux stations S_1 et S_2 mais avec une caténaire à deux fils court-circuités au milieu de la ligne (point C, voir figure ci-contre).



a) De nouveau, représenter le schéma équivalent.

b) Appliquer la loi des noeuds en termes de potentiel au point C.

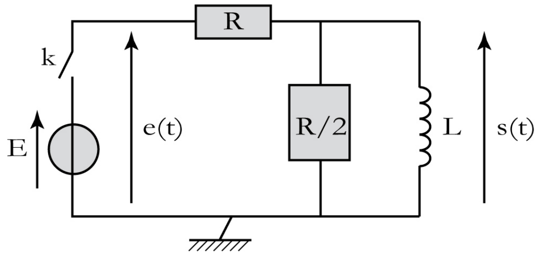
c) Etablir une seconde expression du potentiel en C, puis en déduire l'expression de $\Delta U = E - U$ en fonction de E, r, x, D et I.

d) Calculer la valeur de la distance D à adopter pour avoir une chute de tension maximale de $\Delta U_{\text{max}} = 45\,\text{V}$. Conclusion : quel est le montage le plus avantageux parmi les 3 proposés ?

II. Comparaison de deux circuits

II.1. Circuit RL en régime transitoire

Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur idéal de tension continue de fore électromotrice E. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur k.



1. Déterminer $s(0^-)$ et $s(0^+)$. La tension $s(t)$ est-elle continue en $t = 0$?
Le courant dans la résistance R est-il continu en $t = 0$?

2. Déterminer également le comportement asymptotique de $s(t)$ lorsque $t \to \infty$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.

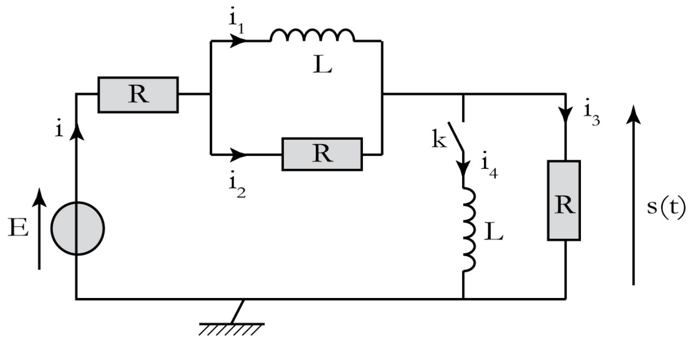
4. En déduire l'expression de $s(t)$ en fonction des données et tracer son allure.

5. Exprimer en fonction de L et R le temps t_0 au bout duquel $s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10}$.

6. On mesure expérimentalement $t_0 = 3,0\,\mu$s. On donne $R = 1,0 \times 10^3\,\Omega$. En déduire L.

II.2. Un circuit plus complexe en régime transitoire

On considère maintenant le montage de la figure ci-dessous où le générateur est un générateur idéal de tension continue de force électromotrice E. L'interrupteur k est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



7. Déterminer s et les courants i_1, i_2, i_3, i_4 et i à $t = 0^+$.

8. Déterminer s et les courants i_1, i_2, i_3, i_4 et i quand $t \to \infty$.

9. **a)** Etablir trois lois de maille indépendantes qu'on exprimera uniquement en fonction des seules inconnues i, i_1 et i_4 (ainsi qu'éventuellement leur dérivées).

b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par i_4, puis celle vérifiée par s. La mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, s = 0\ ,$$

et donner l'expression de ω_0 et Q en fonction des paramètres.

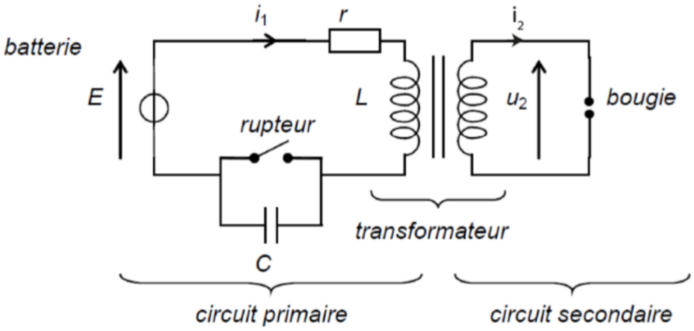
10. En déduire la forme générale de $s(t)$ explicitement, mais sans déterminer les constantes d'intégration. Tracer l'allure qualitative de $s(t)$.

11. **a)** A l'aide d'une des équations précédemment établies, déterminer la valeur de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

b) En déduire l'expression des constantes d'intégration et la forme explicite complète de $s(t)$.

III. Inflammation dans un véhicule à moteur

L'inflammation du mélange air-essence dans le moteur d'une voiture est provoquée par une étincelle qui jaillit entre les bornes d'une bougie d'allumage (cf ci-dessous). Cette étincelle apparaît lorsque la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie est supérieure à $10,0\,\mathrm{kV}$. La batterie de la voiture est considérée comme un générateur idéal de tension de fem $E = 12\,\mathrm{V}$. Pour obtenir des tensions très élevées aux bornes de la bobine, on utilise un transformateur (cf ci-dessous).




Bougie

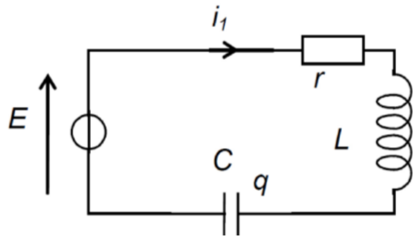
En l'absence de courant dans le circuit secondaire contenant la bougie ($i_2 = 0$), celui-ci n'a aucune influence sur le circuit primaire, et la tension u_2 aux bornes de la bougie est directement proportionnelle à la variation de l'intensité du courant dans le circuit de la batterie (circuit primaire) :

$$u_2 = M\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

où M est une constante positive. Aucune autre connaissance concernant le fonctionnement du transformateur n'est nécessaire pour résoudre le problème.

Afin de faire varier rapidement le courant dans le circuit primaire et obtenir une tension élevée aux bornes de la bougie, on utilise un rupteur pour ouvrir le circuit. Il s'agit d'un interrupteur commandé par le mouvement mécanique du moteur.

La bobine du circuit primaire est modélisée par une inductance pure $L = 15\,\mathrm{mH}$ en série avec une résistance $r = 6,0\,\Omega$. L'objectif du problème est de montrer que l'on peut produire des étincelles aux bornes de la bougie en ouvrant le rupteur. Lorsque le rupteur s'ouvre, le circuit primaire peut alors être modélisé par le schéma ci-contre [a].



[a] Ceci est toujours vrai à la condition de ne pas avoir de courant dans le secondaire. Dans le cas contraire, l'influence est de toute façon mineure et ne perdure que pendant la durée de l'étincelle.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par i_1 et en déduire les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

2. On admet que compte tenu des valeurs des composants, le régime est pseudo-périodique. Donner la forme explicite de $i_1(t)$, sans déterminer les constantes d'intégration.

3. **a)** En supposant que le régime permanent était atteint juste avant l'ouverture du rupteur, déterminer les conditions initiales $i_1(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

b) En déduire les constantes d'intégration, puis l'expression explicite de $u_2(t)$.

c) Représenter graphiquement l'allure de $u_2(t)$. On précisera la position des enveloppes.

4. **a)** Rappeler la définition du décrément logarithmique δ associé à la tension u_2.

b) Retrouver (en le justifiant) le lien entre δ et Q.

c) On mesure un décrément logarithmique $\delta = 0,34$. En déduire la valeur de Q ainsi que celle de la capacité C.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *