

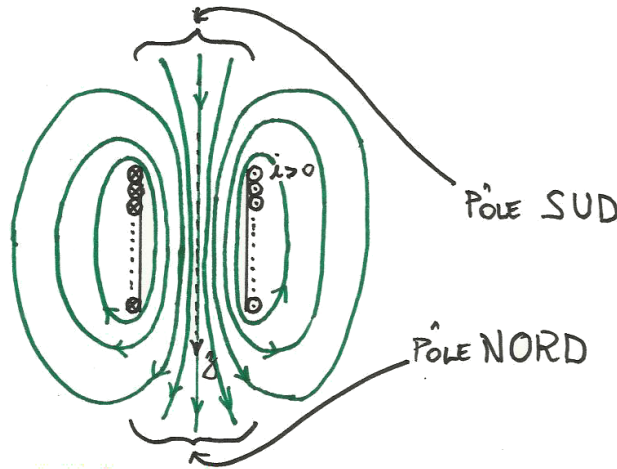
INDUCTION

I. Contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault

(d'après Centrale MP 2015)

I.1. Champ propre créé par la bobine seule

- En tout point M de l'espace, le plan $(M, \vec{e}_z, \vec{e}_r)$ est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc le champ $\vec{B}(M, t)$ est parallèle à ce plan, donc n'a pas de composante selon \vec{e}_θ .
La distribution de courant est invariante par rotation selon θ (car elle est à symétrie de révolution autour de Oz) donc \vec{B} ne dépend pas de la variable θ .



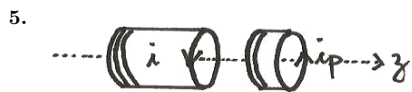
3. $\vec{\mathcal{M}} = Ni\pi R_b^2 \vec{e}_z$, d'où $\mathcal{M} = 2,0 \times 10^{-1} \text{ A.m}^2$.

- Le rapport d'aspect vaut $\frac{R_b}{l_b} = 0,21$. Il n'est pas suffisamment petit pour pouvoir assimiler la bobine à un solénoïde infini.

Si on le suppose toutefois, alors le champ est uniforme à l'intérieur de la bobine et vaut $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l_b} i \vec{e}_z$.

Ceci conduirait à un flux propre $\Phi_p = NB\pi R_b^2 = \mu_0 \frac{N^2}{l_b} \pi R_b^2 i$, d'où $L = \mu_0 \frac{N^2}{l_b} \pi R_b^2 = 21 \text{ mH}$.

I.2. Modification de l'impédance de la bobine en présence dans la plaque



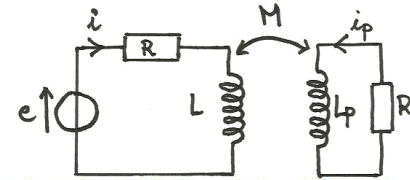
Si $i > 0$, le champ magnétique créé par la bobine a une composante selon \vec{e}_z positive. Il crée donc un flux mutuel $\Phi_m = Mi$ positif à travers le circuit secondaire compte tenu de l'orientation de ce dernier. Ainsi on a $M > 0$.

- Les courants de Foucault induits vont être dissipés par effet Joule dans la plaque, ce qui va s'ajouter à l'effet Joule déjà présent dans la bobine. Cela revient à rallonger la longueur de conducteur à parcourir, donc à augmenter la résistance globale. Donc $\delta R > 0$.

- D'après la loi de Lenz : les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets aux causes qui leur ont donné naissance.

Ainsi, les courants de Foucault vont créer un champ magnétique tendant à s'opposer aux variations de flux imposées par le champ de la bobine. Donc compte-tenu de la géométrie de l'ensemble (les deux "enroulements" sont coaxiaux), le champ magnétique induit s'oppose au champ créé par la bobine. Le flux total dans la bobine se trouve réduit par rapport au flux propre (ou en l'absence de plaque). Ainsi l'inductance propre apparente de la bobine est inférieure en présence de plaque, donc $\delta L < 0$.

-



Dans la bobine, la loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di_p}{dt}$$

Dans la plaque, l'enroulement fictif est en court-circuit :

$$0 = R_p i_p + L_p \frac{di_p}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

- Les équations étant linéaires à coefficients constant, on peut les passer en complexes pour le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω :

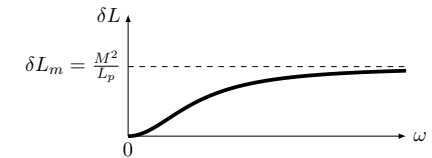
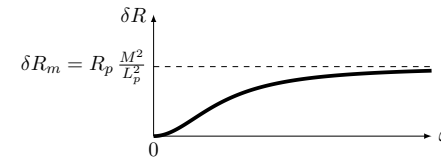
$$\underline{e} = (R + j\omega L) \underline{i} + j\omega M \underline{i}_p \quad \text{et} \quad 0 = (R_p + j\omega L_p) \underline{i}_p + j\omega M \underline{i}$$

En réinjectant la seconde équation dans la première, on obtient

$$\underline{e} = \underline{Z}_e \underline{i} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_e = R + j\omega L + \frac{\omega^2 M^2}{R_p + j\omega L_p} = R + \frac{R_p \omega^2 M^2}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} + j\omega \left(L - L_p \frac{L_p \omega^2 M^2}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} \right)$$

On en déduit $\delta R = R_p \frac{\omega^2 M^2}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} > 0$ et $\delta L = L_p \frac{\omega^2 M^2}{R_p^2 + \omega^2 L_p^2} > 0$.

-



I.3. Évolution de \underline{Z} en présence d'un défaut

- Pour un conducteur filiforme de section s , de longueur ℓ , et de conductivité ρ , la résistance vaut $R = \rho \frac{\ell}{s}$. Dans le cas présent on peut découper par la pensée des fils conducteurs en forme d'anneaux concentriques dans la plaque. Leur section est proportionnelle à l'épaisseur d , donc R_p est inversement proportionnel à d : $R_p \# d^{-1}$.

- Dans une bobine à N spires, on a $M \# N$ et $L \# N^2$. Ici on peut admettre que d joue le même rôle que le nombre de spires puisqu'il y aura d'autant plus de courants de Foucault que la plaque est épaisse. Donc $M_p \# d$ et $L_p \# d^2$.

- À très basse fréquence, on a asymptotiquement $\delta R \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \omega^2 \frac{M^2}{R_p}$ donc $\delta R \# d^3$.

De même on a $\delta L \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \omega^2 \frac{L_p M^2}{R_p^2}$ donc $\delta L \# d^6$.

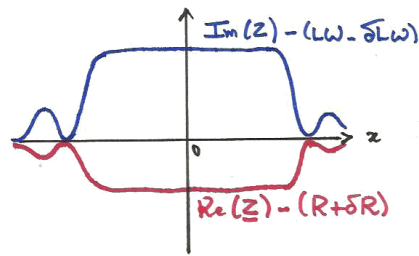
Par contre à haute fréquence, on a $\delta R \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{R_p M^2}{L_p^2}$ donc $\delta R \# d^{-3}$. De même on a $\delta L \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M^2}{L_p}$ donc $\delta L \# d^0$ c'est-à-dire que δL ne dépend pas de d à haute fréquence.

D'après les graphes de la question 10., il n'est pas utile de se placer à très haute fréquence pour obtenir un effet significatif. De plus, on voit ici que la sensibilité aux variations de d est nulle sur δL à haute fréquence. A contrario, la sensibilité sur δR et δL est grande à basse fréquence. Il est donc **préférable de travailler à basse fréquence** (pas trop basse) pour détecter les défauts.

14. À basse fréquence, δR et δL croissent avec d . Donc ici la diminution passagère de d induit une diminution de δR et une augmentation de $-\delta L$. **Le résultat est donc cohérent.** Par contre la forme du signal n'est pas aisée à justifier.

15.

Si la fissure est selon x c'est-à-dire selon l'axe du mouvement, elle va réduire le volume des courants de Foucault pendant un temps plus long que si elle est selon y . On aura donc un palier au lieu d'un extremum.



II. Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique (d'après Centrale MP 2016)

II.1. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

1. Considérons un électron au voisinage de la surface et des pôles, là où la pesanteur et le champ magnétique sont maximaux. Le rapport entre la force gravitationnelle et la force magnétique pour une particule de vitesse v est de l'ordre de

$$\frac{mg}{evB} \sim \frac{10^{-6}}{v}$$

Donc même pour des vitesses très faibles de l'ordre du $m.s^{-1}$ (ce qui n'est pas réaliste), la force magnétique reste largement dominante dans le problème.

2. Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué à l'électron dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen s'écrit donc $\frac{d\vec{v}}{dt}|_{\mathcal{R}} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Par projection selon \vec{u}_z on trouve que $\vec{v}_z = \overline{\text{constant}} = v_{0z} \vec{u}_z$. Par ailleurs, la norme de la vitesse est constante car la force magnétique ne travaille pas, donc la composante orthogonale de la vitesse \vec{v}_\perp est aussi de norme constante car $v^2 = v_\perp^2 + v_z^2$ d'après le théorème de Pythagore. D'après les conditions initiales on a donc $\vec{v}_\perp = \vec{0}$ à tout instant. Ainsi $\vec{v} = v_{0z} \vec{u}_z$. **Le mouvement est rectiligne uniforme le long des lignes de champ**, c'est-à-dire selon l'axe z .

3. a) Le PFD peut être écrit

$$\frac{d\vec{v}}{dt}|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_c = \frac{e}{m} \vec{B},$$

et $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$ puisque d'après la question précédente et les conditions initiales, on a $\vec{v}_z = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{\omega}_c$ est homogène à l'inverse d'un temps, et correspond à un vecteur rotation dont la norme vaut $\omega_c = \frac{eB}{m}$. En notant R_g le rayon de l'orbite géostationnaire ($R_g \approx 4,2 \times 10^4$ km), et sachant que le champ d'un dipôle varie en $\frac{1}{r^3}$, le champ magnétique vu par les électrons sur l'orbite vaut $B = B_T \frac{R_T^3}{R_g^3}$

(où B_T représente le champ à la surface). Ceci conduit à $\omega_c \approx \frac{eB_T R_T^3}{mR_g^3} \approx 3,0 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$.

b) La projection en cartésiennes du PFD conduit au système différentiel linéaire couplé suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - \omega_c \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} + \omega_c y = v_{0x} \\ \dot{y} - \omega_c x = 0 \end{cases}$$

où le second système est obtenu par intégration du premier en appliquant les conditions initiales, et en prenant une position initiale à l'origine du repère, ce qui ne réduit en rien la généralité de l'étude. En réinjectant $\dot{x} = v_{0x} - \omega_c y$ et $\dot{y} = \omega_c x$ dans le premier système, on obtient un système découplé

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x} \end{cases}$$

dont les solutions générales des équations sans second membre associées sont harmoniques de même pulsation ω_c . À l'aide des conditions initiales en position et vitesse on trouve $x = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$, puis

$\dot{y} = \omega_c x = v_{0x} \sin(\omega_c t)$ d'où en intégrant : $y = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$. Ceci conduit à un mouvement cir-

culaire puisque $x^2 + (y - \frac{v_{0x}}{\omega_c})^2 = \frac{v_{0x}^2}{\omega_c^2} = \text{cte}$. Le rayon de ce mouvement est donc $R_c = \frac{v_{0x}}{\omega_c} = \frac{mv_{0x} R_g^3}{eB_T R_T^3}$.

1. On peut alors conclure sans calculer les lois horaires. Le mouvement est donc elliptique, mais comme le vecteur vitesse est de norme constante $\vec{v} = v_{0x}$, cette ellipse est nécessairement un cercle, parcouru avec une vitesse angulaire uniforme. Son rayon peut être obtenu via le PFD, qui en norme donne : $m \frac{v^2}{R_c} = eB_0 v$, d'où $R_c = \frac{mv_{0x}}{eB}$.

Pour l'évaluer on prend une vitesse correspondant à l'énergie de 1 keV comme indiqué dans la fin de l'énoncé², c'est-à-dire $v_{0x} = \sqrt{1000 \times 2e/m} \approx 2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$. Ceci conduit à $R_c \approx 6 \times 10^2 \text{ m}$.

4. a) En utilisant le fait que la force électrostatique est de dimension connue, on a $\left[\frac{e^2}{\epsilon_0 r^2}\right] = \text{M.L.T}^{-2}$. Par ailleurs une puissance est de dimension $[\mathcal{P}] = \text{M.L}^2.\text{T}^{-3}$ (force \times vitesse). Enfin la charge élémentaire a pour dimension $[e] = \text{I.T}$. On obtient donc

$$\text{M.L}^2.\text{T}^{-3} = [\mathcal{P}] = \left[\frac{e^\alpha c^\beta}{\epsilon_0}\right] . \text{L}^2.\text{T}^{-4} = \left[\frac{e^2}{\epsilon_0 r^2}\right] . [e^{\alpha-2}] . \text{L}^{4+\beta}.\text{T}^{-4-\beta} = \text{M.L}^{5+\beta}.\text{T}^{\alpha-\beta-8}.\text{I}^{\alpha-2} .$$

Par identification des puissances on obtient $\boxed{\alpha = 2}$ et $\boxed{\beta = -3}$.

- b) On considère que les résultats précédents sont toujours valables en première approximation bien que l'électron rayonne de l'énergie et donc que la norme de sa vitesse décroît lentement, tout comme R_c

qui lui est proportionnel. Comme $R_c = \frac{mv}{eB}$, on a $v = \frac{eBR_c}{m}$ et donc $\boxed{E_c = \frac{e^2 B^2}{2m} R_c^2 = \frac{1}{2} m \omega_c^2 R_c^2}$.

Le théorème de la puissance cinétique en référentiel galiléen s'écrit alors

$$\frac{dE_c}{dt} = m\omega_c^2 R_c \dot{R}_c = -\mathcal{P} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \quad \text{avec} \quad a = R_c \omega_c^2,$$

la dernière égalité étant l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_c . Après simplification on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre :

$$\tau \dot{R}_c + R_c = 0 \Rightarrow \boxed{R_c(t) = R_c(0) e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}} = \underline{1,8 \times 10^{14} \text{ s} \approx 5,6 \times 10^6 \text{ années}} .$$

La valeur numérique obtenue permet de « justifier a posteriori » l'étude précédente supposant que **le système est conservatif à l'échelle de temps considérée pour les aurores**, c'est-à-dire quelques heures.

5. Le mouvement est la combinaison d'un mouvement rectiligne le long des lignes de champ et d'un mouvement circulaire uniforme orthogonal aux lignes de champ. Il s'agit donc d'un **mouvement hélicoïdal qui s'enroule autour d'un tube de champ**.

II.2. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et non uniforme

6. Le flux du champ magnétique étant conservatif, il est conservé dans chaque section du tube de champ. Ainsi, **la composante normale à la section $|B_z(z)|$ augmente en valeur absolue lorsque la section diminue et vice versa**.

7. D'après les hypothèses, on peut appliquer les conclusions de la question 5.. Le mouvement s'enroule autour d'un tube de champ de rayon $\boxed{R(z) = \frac{mv_{\theta}}{e|B_z(z)|}}$.

8. Le flux magnétique à travers le tube est conservé lors du mouvement de l'électron autour du tube : $\boxed{\Phi = B_z(z) \pi R(z)^2} = \text{cte}$.

9. En exploitant les deux relations précédentes, on obtient que l'énergie cinétique de l'électron vaut

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 + v_{\theta}^2) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{e^2}{2m} B_z(z)^2 R(z)^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{e^2 \Phi}{2\pi m} B_z(z)} .$$

10. On peut donc écrire l'énergie mécanique

$$\boxed{E_m = E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(z) = \text{constante}} \quad \text{avec} \quad \boxed{E_{p_{\text{eff}}}(z) = \frac{e^2 \Phi B_0}{2\pi m} \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)} .$$

². Oubli de donnée de la part du prof pour cette vitesse... dans l'énoncé original il y a avait des données dans le texte mais ce n'était pas plus clair.

11. La particule est donc piégée dans un **puits de potentiel parabolique** puisque $E_m = E_c \geq E_{p_{\text{eff}}}(z)$. Les miroirs magnétiques sont les **positions extrêmes possibles** $\pm z_m$ vérifiant $\boxed{E_m = E_c = E_{p_{\text{eff}}}(\pm z_m)}$. Elles dépendent donc de l'énergie cinétique/mécanique initiale.

12. Le potentiel étant déjà choisi harmonique, de la forme $E_{p_{\text{eff}}}(z) = E_{p_{\text{eff}}}(0) + \frac{1}{2} \kappa z^2$ avec $\kappa = \frac{e^2 \Phi B_0}{\pi m L^2}$, les oscillations autour de la position d'équilibre stable $z = 0$ sont isochrones, de pulsation $\omega_m = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$.

Or le flux est conservé donc $\Phi = B_0 \pi R_c(0)^2 = \pi \frac{m^2 v_{0x}^2}{e^2 B_0}$, ce qui conduit simplement à $\boxed{\omega_m = \frac{v_{0x}}{L}}$.

Pour un aller-retour entre les deux pôles (donc un parcours de 2π radians), en considérant $L \sim \frac{\pi}{2} R_T$ on obtient une durée $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_m} = \sim \frac{\pi}{2} \frac{R_T 2\pi}{v_{0x}}$ donc $\boxed{\Delta t \sim \frac{\pi^2 R_T}{v_{0x}}} \sim \underline{3 \text{ s}}$.

13. La fréquence associée au mouvement selon z est donc $\boxed{f_z = \frac{\omega_m}{2\pi} \sim \frac{v_{0x}}{\pi^2 R_T}} = \underline{0,3 \text{ Hz}}$ (en prenant toujours $L \sim \frac{\pi}{2} R_T$).

Celle associée au mouvement circulaire à la pulsation cyclotron est $\boxed{f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{eB_T}{2\pi m}} = \underline{1,4 \times 10^6 \text{ Hz}}$, en prenant la valeur de ω_c pour le champ magnétique en surface (là où le tube de champ est le plus étroit).

Le rayonnement observé a une fréquence de l'ordre de $\boxed{f = \frac{c}{\lambda}} \sim \underline{3 \times 10^5 \text{ Hz}}$ pour $\lambda = 1 \text{ km}$, ce qui correspond donc au mouvement circulaire à la pulsation cyclotron.

Remarque : cela est conforme au fait qu'un « rayonnement d'antenne » ne rayonne pas d'énergie dans la direction du mouvement oscillatoire des particules chargées, ici la direction z puisqu'on observe le rayonnement au voisinage des pôles.