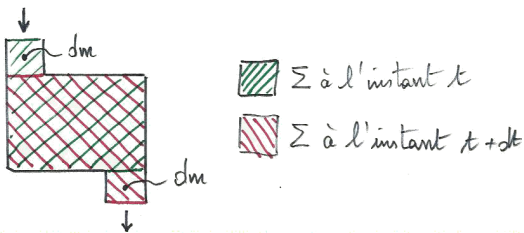


THERMODYNAMIQUE

I. Fonctionnement d'une turbine à gaz (d'après Banque PT 2012)

I.1. Préliminaires

1.



- On définit un système Σ fermé dont une partie est située à l'intérieur de la machine à l'instant t et à un instant infiniment proche $t + dt$.
- En régime stationnaire, il n'y a pas d'accumulation de masse à l'intérieur donc entre t et $t + dt$, la masse dm qui entre est égale à la masse dm qui sort à l'autre extrémité. Elle vérifie $dm = D dt$.
- Le premier principe appliqué à Σ entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$dE_c + dE_p + dU = q dm + w dm + P_e v_e dm - P_s v_s dm$$

où les 2 derniers termes représentent les travaux des forces de pression exercées par les fluides en amont et en aval, avec v_e et v_s les volumes massiques en entrée et en sortie.

- Par stationnarité, le membre de gauche de ce bilan se réduit à la différence entre la quantité sortant et la quantité entrant :

$$\frac{1}{2} dm c_s^2 - \frac{1}{2} dm c_e^2 + dm g z_s - dm g z_e + dm u_s - dm u_e = (q + w + P_e v_e - P_s v_s) dm$$

Après simplification par dm et en introduisant l'enthalpie massique $h = u + Pv$, on obtient le résultat demandé.

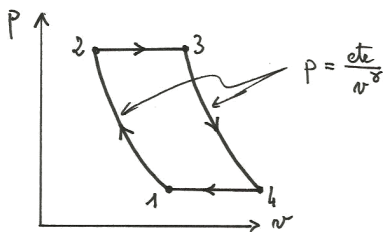
2. D'après la seconde loi de Joule : $c_p (T_s - T_e) = q + w$.

3. Pour un gaz parfait, $h = u + \frac{RT}{M}$ d'où $c_p = c_v + \frac{R}{M}$ (Relation de Mayer). Avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ cela conduit à

$$c_v = \frac{R}{(\gamma - 1)M} = 7.2 \times 10^2 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \text{ et } c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M} = 1.0 \times 10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

I.2. Modélisation idéale du cycle : cycle de Joule

4. Cycle de Joule :



5. La variation élémentaire d'entropie massique sur un chemin réversible vaut pour un gaz parfait

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} = \frac{1}{T} (du - \delta w_{rev}) = \frac{1}{T} (c_v dT + P dv) = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dV}{V} = c_v d \ln(T v^{\gamma-1}) = c_p d \ln(T^\gamma P^{1-\gamma})$$

d'où en intégrant entre les deux états : $s(T, P) = s_0 + c_v \ln \frac{T^\gamma P^{1-\gamma}}{T_0^\gamma P_0^{1-\gamma}}$.

6. Une évolution isobare à $P = P_0$ conduit donc à $s(T, P_0) = s_0 + c_p \ln \frac{T}{T_0}$ ou $T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_p}}$. Les isobares sont donc des branches d'exponentielles.

Détermination des grandeurs énergétiques.

7. Il s'agit de transferts thermiques isobares sans échange de travail utile, donc d'après 1. :

$$q_{23} = h_3 - h_2 = c_p (T_3 - T_2) \text{ et } q_{41} = h_1 - h_4 = c_p (T_1 - T_4).$$

8. La compression et la détente étant réversibles et isentropiques, elles sont en fait adiabatiques¹. Donc

$$w_{12} = h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) \text{ et } w_{34} = h_4 - h_3 = c_p (T_4 - T_3).$$

9. Le travail net récupéré par l'arbre est l'opposé du travail total reçu par l'air : $w_{net} = -(w_{12} + w_{23} + w_{34} + w_{41}) = -(w_{12} + 0 + w_{34} + 0)$. D'où $w_{net} = c_p (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$.

Expression du rendement et optimisation.

10. L'énergie consommée au contact de la source chaude est q_{23} d'où $\eta = \frac{w_{net}}{q_{23}}$. D'après les résultats précédents

cela conduit à $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$.

11. La loi de Laplace s'applique le long des isentropes : $T_2 = T_1 \tau^{1-\frac{1}{\gamma}}$ et $T_4 = T_3 \tau^{\frac{1}{\gamma}-1}$. On en déduit

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{(T_4 - T_1) \tau^{1-\frac{1}{\gamma}}} \text{ d'où } \eta = 1 - \frac{1}{z} \text{ avec } z = \tau^{1-\frac{1}{\gamma}}.$$

12. On peut améliorer le rendement en augmentant z , ce qui peut se faire de deux façons :

- en augmentant le rapport de compression τ ;
- en augmentant γ .

Optimisation du travail récupéré sur l'arbre

13. L'aire à l'intérieur du cycle se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_{cycle} = \int_{v_2}^{v_3} p dv + \int_{v_3}^{v_4} p dv - \int_{v_2}^{v_1} p dv - \int_{v_1}^{v_4} p dv = \oint_{cycle} p dv = -w_{tot}$$

où w_{tot} est le travail total reçu par un kilogramme de fluide au cours d'un cycle. Or au cours d'un cycle la variation d'une fonction d'état est nulle,

$$\Delta u = w_{tot} + q_{tot} = 0 = \Delta h = -w_{net} + q_{tot}$$

donc le travail w_{tot} s'identifie (au signe près) au travail net w_{net} . Ainsi $\mathcal{A}_{cycle} = w_{net}$. **L'aire du cycle représente le travail massique net récupérable** par un opérateur extérieur.

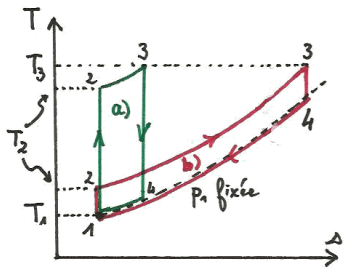
1. Cela est compréhensible car ce sont des transformations assez rapides, et pour lesquelles on cherche à éviter les pertes thermiques pour améliorer le rendement.

14. Pour une transformation réversible, $ds = \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \frac{du - \delta w_{rev}}{T} = \frac{du + pdv}{T}$. Ainsi,

$$\oint_{\text{cycle}} T ds = \oint_{\text{cycle}} du + \oint_{\text{cycle}} pdv = 0 + \oint_{\text{cycle}} pdv \quad \text{d'où} \quad \boxed{\oint_{\text{cycle}} T ds = w_{net}}$$

De même que dans le diagramme de Clapeyron, l'aire du cycle en diagramme (T, s) représente le travail massique net récupérable.

15.



On observe que nécessairement l'aire du cycle tend vers 0 lorsque T_2 se rapproche de T_3 ou de T_1 . Comme l'aire du cycle est une fonction continue et positive de T_2 sur l'intervalle $[T_1, T_3]$, il admet nécessairement un maximum sur ce domaine.

16. En exploitant les lois de Laplace précédentes on obtient $w_{net} = c_p T_1 (1 - z) + c_p T_3 \left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

17. En dérivant, on trouve un unique maximum $z_m = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$, ce qui conduit à :

$$\boxed{T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3}} \quad \text{et} \quad \boxed{w_{net max} = c_p (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2}$$

18. On obtient $w_{net} = 205 \text{ kJ.kg}^{-1}$, $T_2 = T_4 = 548 \text{ K}$, et $\eta = 0,45$.

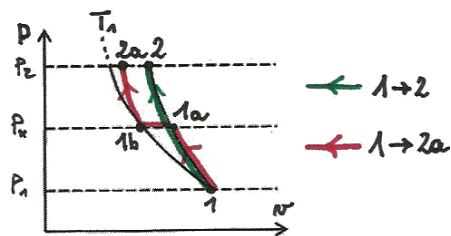
I.3. Mise en place d'une compression étagée

19. Pour une isotherme : la loi du gaz parfait implique $Pv = cte \Rightarrow \frac{dP}{dv} = -\frac{P}{v}$ (par différenciation logarithmique).
 Pour une isentrope : la loi de Laplace implique $Pv^\gamma = cte \Rightarrow \frac{dP}{dv} = -\gamma \frac{P}{v}$.
 Ainsi on a localement

$$\boxed{\left. \frac{dP}{dv} \right|_{\text{isentrope}} = \gamma \left. \frac{dP}{dv} \right|_{\text{isotherme}}}$$

donc la pente d'une isentrope est localement supérieure (en valeur absolue) à celle d'une isotherme car $\gamma > 1$.

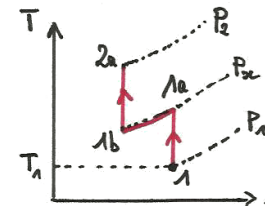
20.



21. Le fait d'atteindre une température $T_{2a} < T_2$ permet d'augmenter le travail de compression mais aussi l'échauffement isobare, et du même coup d'augmenter l'aire du cycle c'est-à-dire le travail net récupérable.

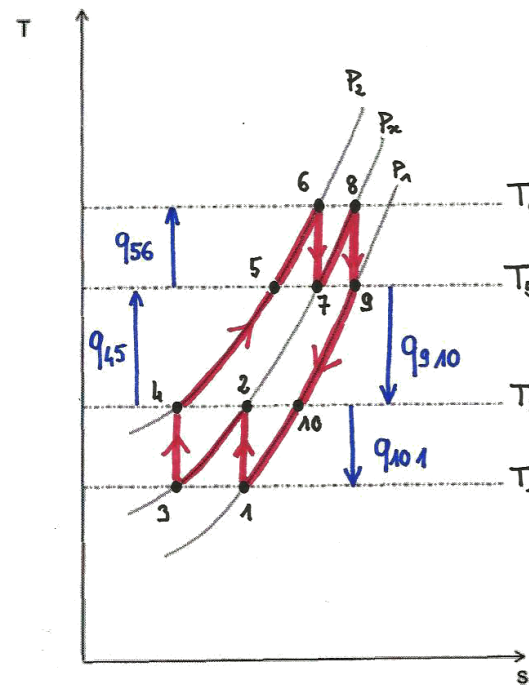
Remarque : il n'est pas évident de voir graphiquement l'impact sur le rendement. Toutefois on peut anticiper le fait que cela va réduire localement les pertes thermiques (non modélisées ici) car le fluide est plus froid à la sortie du compresseur.

22.



I.4. Turbine à gaz avec compresseur et turbine à 2 étages et régénérateur

23.



24. Chaque transfert thermique est isobare et s'écrit $q_{np} = c_p(T_p - T_n)$. Donc ils se lisent sur les écarts entre les isothermes, au coefficient c_p près. cf le graphe précédent.

25. Les échanges de chaleur ayant lieu entre les températures T_2 et T_5 s'effectuent au contact du régénérateur, donc ne font pas partie de l'énergie consommée à chaque cycle. En effet, $q_{45} + q_{910} = 0$, par conséquent la

chaleur consommée se limite à $q_{56} + q_{78}$. On a donc $\eta = \frac{w_{net}}{q_{56} + q_{78}} = \frac{w_{net}}{2q_{56}}$.

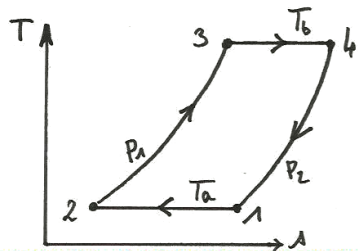
Par ailleurs sur un cycle on a toujours $\Delta h = -w_{net} + q_{tot} = 0$ donc $w_{net} = q_{45} + 2q_{56} + q_{910} + 2q_{101} = 2(q_{56} + q_{101})$.

Finalement, ceci conduit à $\eta = 1 + \frac{q_{101}}{q_{56}}$ donc $\eta = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_6 - T_5}$.

26. On doit avoir $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_{x_{n-1}}} \frac{P_{x_{n-1}}}{P_{x_{n-2}}} \dots \frac{P_{x_1}}{P_1} = r^n$, d'où $r = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

27. $\lim_{n \rightarrow \infty} r = 1$. Ainsi, plus il y a d'étages de compression, plus le rapport de compression intermédiaire est faible et proche de 1.

28. Cycle limite :



- 29. • 1 → 2 : compression isotherme étagée.
- 2 → 3 : échauffement isobare au contact du régénérateur.
- 3 → 4 : détente isotherme étagée.
- 4 → 1 : refroidissement isobare au contact du régénérateur.

30. Comme il s'agit d'une transformation réversible et isotherme : $q_{ch} = q_{34} = T_b (s_4 - s_3)$, d'où d'après 5. :

$$q_{ch} = T_b (\gamma - 1) c_v \ln \frac{P_2}{P_1} = T_b \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} > 0.$$

Remarque : on pourrait retrouver ce résultat simplement en appliquant le premier principe pour un gaz parfait le long d'une isotherme.

31. De même on a aussi une isotherme réversible : $q_{fr} = q_{12} = T_a (s_2 - s_1)$, d'où

$$q_{fr} = T_a (\gamma - 1) c_v \ln \frac{P_1}{P_2} = T_a \frac{R}{M} \ln \frac{P_1}{P_2} < 0.$$

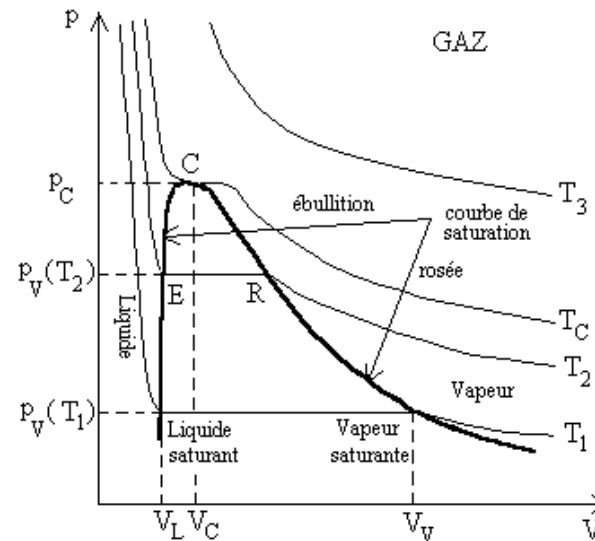
32. Comme $\eta = \frac{w_{net}}{q_{ch}} = 1 + \frac{q_{fr}}{q_{ch}}$, on en déduit $\eta = 1 - \frac{T_a}{T_b}$.

33. On a obtenu le **rendement de Carnot** avec une infinité d'étages de compression et un régénérateur. En pratique on ne peut pas réaliser trop d'étages sous peine de **complexité** et de **coût prohibitif**. Par ailleurs le gain en rendement s'amenuise à mesure que l'on ajoute des étages : ceci peut se comprendre graphiquement en observant l'allure du cycle, dont l'aire représentée par les « dents de scie » deviennent de plus en plus négligeables au regard de l'aire totale du cycle.

II. Etude thermodynamique d'un CD-RW (d'après CAPES 2012)

II.1. Généralités sur les systèmes diphasés

1. Le système diphasé est **monovariant**, donc la **température est fixée** si la pression l'est.
2. On parle respectivement de **Vaporisation** et de **Sublimation**.
- 3.



II.2. Evaluation de la vitesse maximale d'écriture

4. Il s'agit d'un petit cylindre à base circulaire : $m_1 = \mu_1 \pi r_0^2 h_1$.
5. La transformation est un échauffement isobare : $Q_1 = \Delta H_1 = m_1 c_1 (T_{fus} - T_0)$.
6. La transformation est une fusion isobare : $Q_2 = \Delta H_2 = m_1 \ell_1$.
7. On considère que les deux transferts thermiques Q_1 et Q_2 sont fournis par le faisceau laser sans pertes : $\mathcal{P}_0 \Delta t_{min} = Q_1 + Q_2$ d'où $\Delta t_{min} = (c_1 (T_{fus} - T_0) + \ell_1) \frac{\mu_1 \pi r_0^2 h_1}{\mathcal{P}_0}$.
8. D'où $\Delta t_{min} = 5,09 \times 10^{-8} \text{ s}$.
9. Entre l'instant $t = 0$ et l'instant t , la surface balayée par le faisceau de largeur $2r_0$ est $S(t) = S_0 + 2r_0 v_1 t$, où S_0 est une surface résiduelle liée à la forme circulaire de la section du faisceau. En différenciant par rapport au temps, on voit que seul intervient le rectangle : $dS = 2r_0 v_1 dt$.
10. La masse de matière photosensible correspondant à cette aire balayée est $dm = \mu_1 h_1 dS = 2\mu_1 h_1 r_0 v_1 dt$.
11. En admettant que tout l'énergie apportée par le faisceau est effectivement utilisée pour la transformation de cette masse, on a

$$\delta Q = \mathcal{P}_0 dt = dm (c_1 (T_{fus} - T_0) + \ell_1) \Rightarrow v_{1max} = \frac{\mathcal{P}_0}{2\mu_1 h_1 r_0 (c_1 (T_{fus} - T_0) + \ell_1)}$$

12. $v_{1max} = 17,0 \text{ m.s}^{-1}$.