

MÉCANIQUE

I. Sismographe de Lacoste

1. Le triangle OAB est isocèle en O , de côté $OA = OB = a$ et d'angle au sommet $\theta_B - \theta$. Donc sa base vaut

$$AB = \ell = 2a \sin\left(\frac{\theta_B - \theta}{2}\right).$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat en utilisant l'angle inscrit $\frac{\theta_B - \theta}{2}$ associé à l'angle au centre $\theta_B - \theta$.

On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore généralisé et obtenir $\ell = a\sqrt{2(1 - \cos(\theta_B - \theta))}$, qui conduit au même résultat à l'aide de la formule trigo de l'angle moitié.

2. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur sont concentrées au point M de masse m , dont le mouvement est circulaire de rayon b . Sa vitesse est $b\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ dans la base polaire, donc $E_c = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$. Sa hauteur est $y = b\sin\theta$ donc $E_{p_{\text{pes}}} = mgb\sin\theta$. Enfin il faut considérer l'énergie potentielle élastique liée à l'existence du ressort, de longueur à vide nulle : $E_{p_{\text{el}}} = \frac{1}{2}k\ell^2 = 2ka^2\sin^2\left(\frac{\theta_B - \theta}{2}\right)$. Ceci conduit à

$$E_m = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta) \quad \text{avec} \quad E_p(\theta) = mgb\sin\theta + 2ka^2\sin^2\left(\frac{\theta_B - \theta}{2}\right).$$

3. La position d'équilibre vérifie nécessairement

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta_E) = 0 &\Leftrightarrow mgb\cos\theta_E - 2ka^2\sin\frac{\theta_B - \theta_E}{2}\cos\frac{\theta_B - \theta_E}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow mgb\cos\theta_E = ka^2\sin(\theta_B - \theta_E) \Leftrightarrow \cos\theta_E = \frac{ka^2}{mgb}(\sin\theta_B\cos\theta_E - \sin\theta_E\cos\theta_B) \\ &\Leftrightarrow \tan\theta_E = \frac{\sin\theta_B - \frac{mgb}{ka^2}}{\cos\theta_B} \Leftrightarrow \theta_E = \arctan\left(\frac{\sin\theta_B - \frac{mgb}{ka^2}}{\cos\theta_B}\right), \end{aligned}$$

puisque $\theta_E \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Cet angle est nul à la condition $\theta_E = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_B = \frac{mgb}{ka^2}$.

4. a) Le référentiel du laboratoire étant considéré galiléen, le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= -h\dot{v}^2 = -hb^2\dot{\theta}^2 \\ &= \dot{\theta} \cdot \left[mb^2\ddot{\theta} + \frac{dE_p}{d\theta} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow mb^2\ddot{\theta} = -hb^2\dot{\theta} - \frac{dE_p}{d\theta} \Leftrightarrow mb^2\ddot{\theta} = -hb^2\dot{\theta} - mgb\cos\theta + ka^2\sin(\theta_B - \theta).$$

b) Pour les petits mouvements autour de $\theta_E = 0$, on développe au premier ordre non nul

$$-\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) \approx -\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_E) - \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_E)(\theta - \theta_E) = 0 - \kappa(\theta - \theta_E) \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_E)$$

Le calcul donne, avec $\theta_E = 0$,

$$\kappa = -mgb\sin\theta_E + ka^2\cos(\theta_E - \theta_B) = ka^2\cos\theta_B = ka^2\sqrt{1 - \sin^2\theta_B} \quad \text{d'où} \quad \kappa = \sqrt{k^2a^4 - m^2g^2b^2}$$

en utilisant la condition obtenue en 3.. L'équation du mouvement sans forçage est alors

$$mb^2\ddot{\theta} \approx -hb^2\dot{\theta} - \kappa\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta \approx 0$$

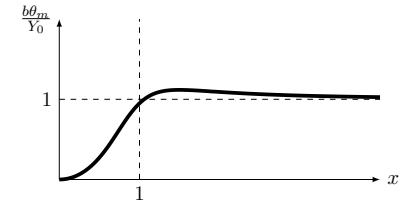
avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{mb^2}} = \left[\frac{k^2a^4}{m^2b^4} - \frac{g^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{4}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{k}{m}\cos\theta_B}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h}$.

Les paramètres ω_0 et Q sont caractéristiques du système donc ne changent pas en présence d'un forçage extérieur.

5. L'équation étant linéaire à coefficients constants, on peut passer en complexes en notant que $\theta = \Re(\theta_m e^{i(\omega t - \varphi)})$

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}i\omega + \omega_0^2\right)\theta_m e^{i(\omega t - \varphi)} = \omega^2 \frac{Y_0}{b} e^{i\omega t} \Rightarrow \theta_m = \frac{x^2 Y_0 / b}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

6. On obtient le graphe ci-dessous, qui comporte une faible résonance au-delà de $x = 1$.



Il s'agit d'un **filtrage passe-haut**.

Les oscillations du sol seront bien reproduites lorsque $\theta_m \approx \frac{Y_0}{b}$ donc typiquement pour $x \gtrsim 2 \Leftrightarrow \omega \gtrsim 2\omega_0$.

7. On a ici $\omega_0^2 = \frac{ka^2}{mb^2}\cos\theta_B < \frac{ka^2}{mb^2}$ valeur qu'on obtiendrait pour $\theta_B = 0$, c'est-à-dire pour un sismographe assimilable à une simple masse au bout d'une ressort. A condition que $a \approx b$, la valeur non nulle de θ_B permet donc de réduire la pulsation propre ω_0 , et donc d'abaisser la limite des pulsations mesurables, donnant accès à des mouvements plus lents.

II. Étude d'un accéléromètre pendulaire (d'après X-ENS MP 2014)

1. Considérons le mouvement d'un bras de longueur $\ell = 50$ cm qui effectue un demi-tour « rapide » en une durée $\tau = 0,25$ s. Il lui correspond une vitesse moyenne $v_{moy} = \frac{\ell}{\tau} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Si l'on considère qu'en fin de parcours, le bras est freiné de v_{moy} à 0 en $\tau' = 0,1$ s, l'accélération finale est $a_{rapide} = \frac{\ell}{\tau\tau'} \simeq 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2g$.

Si l'on multiplie par 10 les durées pour décrire un mouvement lent, on obtient $a_{lent} \simeq 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,02g$. On se situe donc dans les intervalles précisés par la fiche constructeur.

Remarques : le mouvement consistant à laisser tomber son bras tenant la manette en chute libre correspond à une accélération de 1g. Partant de là, il est raisonnable de considérer que l'on peut obtenir des accélérations légèrement supérieures avec un effort, ou moins fortes en retenant son mouvement.

Les mesures effectuées sur des volleyeurs montrent que leur bras peuvent atteindre une accélération de l'ordre de 20g lors de la frappe du ballon!

2. Notons x la position de l'extrémité gauche du ressort, solidaire du boîtier, et ℓ_0 la longueur à vide du ressort (correspondant à la position $X = 0$). Dans \mathcal{R} l'abscisse de la masse d'épreuve s'écrit $x + \ell_0 + X$, donc son accélération vaut¹ $(\ddot{x} + \ddot{X}) \vec{e}_x = (a + \ddot{X}) \vec{e}_x$. Ainsi, l'équation du mouvement de la masse m dans ce référentiel est donnée par :

$$m(a(t) + \ddot{X}) \vec{e}_x = -kX \vec{e}_x - 2m\gamma \dot{X} \vec{e}_x + m\vec{g} + \vec{N}$$

(où la dernière force est la réaction du support (qui est normale). Après projection selon \vec{e}_x et simplification, on obtient :

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t).$$

3. Dans tous les cas, la solution particulière est $X_p = -\frac{a}{\omega_r^2}$. Le discriminant réduit de l'équation caractéristique associée à l'équation est $\delta = \gamma^2 - \omega_r^2$.

1^{er} cas - amortissement faible : $\gamma < \omega_r \Rightarrow \delta < 0$. Les solutions s'écrivent :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + \exp(-\gamma t) \left(A \cos(\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t) \right).$$

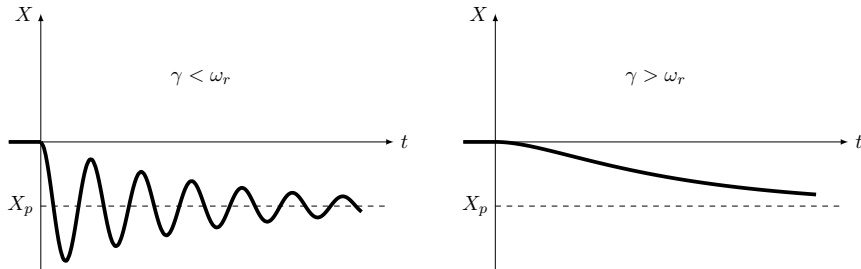
A et B sont les constantes d'intégration.

2^e cas - amortissement fort : $\gamma > \omega_r \Rightarrow \delta > 0$.

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + A \exp\left(\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}\right) t\right) + B \exp\left(\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}\right) t\right).$$

4. Comme $\gamma > 0$, et $\sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} < \gamma$ dans le second cas, dans tous les cas $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2}$.

5. Les courbes débutent en $X(0) = 0$ avec $\dot{X}(0) = 0$ (X et \dot{X} sont continues) :



1. En toute rigueur, ce résultat est valable car les deux référentiels considérés sont en translation l'un par rapport à l'autre, auquel cas la dérivation par rapport à l'un est assimilable à la dérivation par rapport à l'autre (les bases restent identiques et fixes), cf programme de SPE.

6. 1^{er} cas : oscillateur faiblement amorti. Le temps de réponse est $\tau = \frac{1}{\gamma}$.

2^e cas : oscillateur fortement amorti. Il y a a priori deux constantes, car il y a deux exponentielles décroissantes. Il faut considérer le temps de réponse le plus grand, puisque c'est celui qui décrira l'amortissement le plus lent.

Ainsi, $\tau = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}}$.

7. On sépare les deux cas, qui se rejoignent pour $\gamma = \omega_r$:



8. Le temps de réponse minimal est celui correspondant au régime critique $\gamma = \omega_r$. Il vaut $\tau = \frac{1}{\omega_r}$.

9. On se trouve dans le cas pseudo-périodique, d'où $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2Q}{\omega_r} \simeq 1 \times 10^{-4}$ s. Le déplacement stationnaire est, en valeur absolue, $X_p = \frac{a}{\omega_r^2} \simeq 1 \times 10^{-8}$ m.

10. Le temps de réponse et la sensibilité, caractérisée par X_p , sont tous deux des fonctions décroissantes de la pulsation ω_r . Ainsi, un temps de réponse court est incompatible avec une grande sensibilité. Cette propriété est indépendante du coefficient d'amortissement, mais peut être aggravée par le choix d'un régime transitoire non critique (donc plus long).

11. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit maintenant

$$m(\vec{a} + \ddot{X} \vec{e}_x) = -kX \vec{e}_x - 2m\gamma \dot{X} \vec{e}_x + m\vec{g} + \vec{N}$$

d'où après projection selon \vec{e}_x ,

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = (\vec{g} - \vec{a}) \cdot \vec{e}_x$$

Ainsi, le dispositif mesure la composante de la différence entre la pesanteur \vec{g} et l'accélération \vec{a} du boîtier sur \vec{u} , soit $(\vec{g} - \vec{a}) \cdot \vec{u}$. On retrouve bien le résultat précédent en prenant $\vec{u} = \vec{e}_x$ et $\vec{a} = a(t)\vec{u}$ puisque $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.