MÉCANIQUE

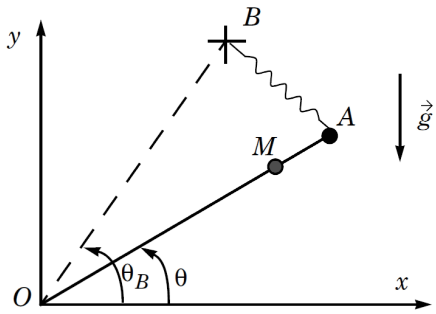
CALCULATRICES INTERDITES

On effectuera toutes les applications numériques à la main avec un seul chiffre significatif.

I. Sismographe de Lacoste

Pour enregistrer fidèlement des secousses de période importante (de l'ordre de quelques dizaines de secondes), on utilise un modèle de sismographe dit de Lacoste, dont la suspension est schématisée ci-dessous.

Sur une tige de longueur $OA = a$ et **de masse négligeable**, est soudé un point matériel de masse m à une distance $OM = b$ ($b < a$). Cette tige peut osciller sans frottement autour de l'axe Oz horizontal. On note $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ les vecteurs unitaires associés aux axes cartésiens Ox, Oy et Oz. La position de la tige est repérée par l'angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OA}})$. Un ressort relie l'extrémité A et la tige à un point B fixe dont la position est définie par la longueur $OB = a$ et l'angle constant $\theta_B = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OB}})$. Ce ressort, de longueur à vide négligeable, exerce sur la tige en A une force $\overrightarrow{F}$ proportionnelle à sa longueur soit $\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{AB}$, k désignant une constante positive. Enfin, l'air ambiant exerce sur la masse en M une force de frottement fluide $\overrightarrow{\Gamma} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive.



La norme du champ de pesanteur vaut $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$. On travaille dans le référentiel terrestre, considéré galiléen.

1. Exprimer la longueur du ressort $\ell = AB$ en fonction de θ et θ_B. On n'oubliera pas que les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon a.
2. Exprimer l'énergie mécanique du système { tige OA, masse M}, qui sera assimilé au point matériel M de masse m, en fonction de θ et des paramètres du problème. Dans la suite on notera $E_p(\theta)$ l'énergie potentielle totale.
3. Etablir l'expression de la position d'équilibre θ_E.
   On souhaite que θ_E soit nul. Quelles conditions doivent vérifier les différents paramètres pour qu'il en soit ainsi ?
   On supposera cette condition vérifiée dans toute la suite.
4. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, établir l'équation du mouvement de M vérifiée par θ.

Le dispositif est maintenant soumis à une secousse sismique au cours de laquelle le mouvement vertical du sol est décrit par une vibration de la forme $y_s(t) = Y_0\cos(\omega t)$. L'équation différentielle associée aux petits mouvement de la masse m peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = \omega^2\frac{Y_0}{b}\cos(\omega t)$$

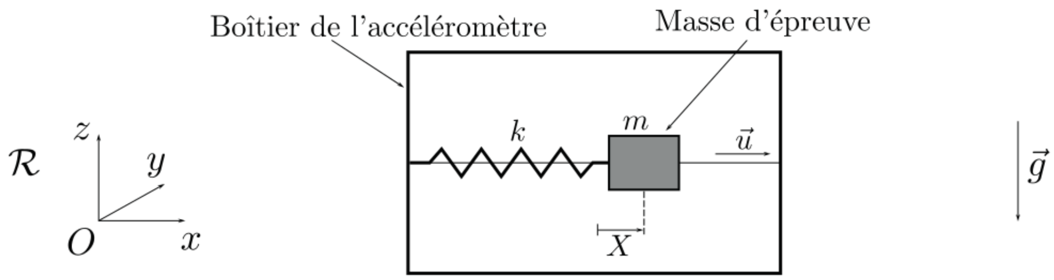
5. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
6. On suppose que θ reste petit et, en régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega t - \varphi)$. Exprimer l'amplitude θ_m des oscillations en fonction de $x = \omega/\omega_0$.
7. Le sismographe est légèrement résonant pour la pulsation $\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$. Tracer l'allure de $b\theta_m/Y_0$ en fonction de x. Quel type de filtrage mécanique est réalisé par ce dispositif ?
   Pour quelles pulsations ω de la secousse le mouvement de la masse m reproduira-t-il celui du sol ?
8. Expliquer en quoi le sismographe de Lacoste permet de détecter des périodes d'oscillations particulièrement lentes, par rapport à une simple masse m au bout d'un ressort de raideur k.

II. Étude d'un accéléromètre pendulaire

Dans le problème g désigne l'accélération de la pesanteur que l'on prendra égale à $10\,\mathrm{m.s^{-1}}$. L'accéléromètre ADLX qui équipe les manettes des consoles Nintendo WiiU$^{\mathrm{TM}}$ est un accéléromètre de type pendulaire. La fiche constructeur précise qu'il peut mesurer des accélérations comprises entre $-5g$ et $+5g$, que la plus petite accélération mesurable est de $0,01g$, et qu'il peut résister à des chocs allant jusqu'à $10000\,g$.

1. Donner, en précisant la méthode utilisée, les ordres de grandeur des accélérations subies par la manette de jeu placée dans la main d'un joueur agitant rapidement ou lentement le bras. Les situer relativement aux valeurs annoncées par le constructeur.

Un accéléromètre pendulaire peut être assimilé à un système masse-ressort amorti, dont le schéma de principe est présenté sur la figure 1. L'accéléromètre se compose d'une masse d'épreuve m, astreinte à se déplacer selon un axe $\vec{u}$ solidaire du boîtier extérieur de l'accéléromètre. La masse d'épreuve est reliée au boîtier par un ressort de raideur k. On note X la position de la masse d'épreuve par rapport au centre du boîtier. La position au repos de la masse d'épreuve, lorsque l'axe $\vec{u}$ est horizontal, est $X = 0$. On suppose que la masse d'épreuve subit également une force de frottement visqueux $F = -2m\gamma\dot{X}\vec{u}$ où γ est une constante positive.



Le boîtier se déplace dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé Galiléen et on note $\vec{a}$ son accélération dans ce référentiel. Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse d'épreuve quitte sa position d'équilibre. La mesure de la position X permet alors de déduire l'accélération du boîtier.

On suppose tout d'abord que l'accéléromètre garde une orientation fixe et horizontale selon l'axe Ox ($\vec{u} = \vec{e}_x$). De plus, l'accéléromètre ne se déplace que selon l'axe Ox ($\vec{a} = a(t)\,\vec{e}_x$). On note $\omega_r = \sqrt{k/m}$.

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la variable X dans $\mathcal{R}$, faisant intervenir ω_r, γ et $a(t)$.

On suppose que l'accéléromètre ainsi que sa masse d'épreuve sont immobiles pour des temps t négatifs, et que l'accéléromètre subit une accélération constante $\vec{a} = a\,\vec{e}_x$ pour les temps t positifs.

3. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle dans le cas faiblement amorti où $\gamma < \omega_r$ et dans le cas fortement amorti où $\gamma > \omega_r$. On ne cherchera pas à calculer les deux constantes d'intégration qui apparaissent dans les expressions.

4. Montrer que dans les deux cas, faiblement et fortement amorti, $X(t)$ tend vers une valeur stationnaire dont on donnera l'expression.

5. Tracer l'allure de $X(t)$ dans les deux cas, faiblement et fortement amortis.

On appelle *temps de réponse* de l'accéléromètre le temps caractéristique pour que $X(t)$ atteigne le régime stationnaire.

6. Donner le temps de réponse de l'accéléromètre dans les deux cas, faiblement et fortement amorti.

7. Tracer l'allure du temps de réponse de l'accéléromètre en fonction du paramètre γ, pour une pulsation ω_r fixée.

8. D'après le graphe de la question précédente, quel est le temps de réponse minimal pour un accéléromètre de pulsation ω_r donnée ?

D'après la fiche constructeur, l'accéléromètre ADLX possède les caractéristiques suivantes : pulsation de résonance $\omega_r = 2\pi \times 5500\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, facteur de qualité $Q = \omega_r/(2\gamma) = 2,5$.

9. Donner la valeur du temps de réponse de l'accéléromètre, ainsi que celle du déplacement stationnaire de la masse d'épreuve pour une accélération de $1\,g$.

10. Pourquoi peut-on dire que les performances de ce type d'accéléromètre résultent d'un compromis entre temps de réponse et sensibilité, c'est-à-dire qu'un accéléromètre pendulaire très sensible aura un temps de réponse long ?

11. On considère que l'accéléromètre n'est plus horizontal et qu'il subit une accélération constante $\vec{a}$ d'orientation quelconque. Montrer que ce type d'accéléromètre n'est pas capable de mesurer la composante de l'accélération $\vec{a}$ selon $\vec{u}$ mais une quantité que l'on exprimera en fonction de $\vec{a}$, $\vec{u}$ et l'accélération de la pesanteur g.