

MÉCANIQUE - THERMODYNAMIQUE

I. Etude d'un moteur à injection (d'après EIA ATS/TSI 2001)

I.1. Thermodynamique du moteur à allumage commandé

a. Cycle moteur ditherme théorique

1. L'énergie et l'entropie étant des fonctions d'état, leur variation est nulle sur un cycle, ce qui conduit à

$$0 = W + Q_f + Q_c \quad \text{et} \quad 0 = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} + S_c \quad \text{avec} \quad S_c \geq 0,$$

où S_c représente l'entropie créée au cours du cycle.

- Par définition d'un cycle moteur, on a $W < 0$.
- Par conséquent on a aussi $Q_f + Q_c > 0$ (premier principe). Or le second principe impose $Q_c = -\frac{T_c}{T_f} Q_f - T_c S_c$. Cette équation réinjectée donne $Q_f (1 - \frac{T_c}{T_f}) > T_c S_c > 0$ donc comme $T_c > T_f$ on a $Q_f < 0$.
- Enfin, comme $Q_f + Q_c > 0$ cela implique $Q_c > 0$.

On retrouve bien que le moteur consomme de la chaleur en provenance de la source chaude et en relâche vers la source froide.

2. Le rendement est le rapport de l'énergie produite sur l'énergie consommée : $\eta = -\frac{W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$.

En réinjectant de nouveau l'égalité du second principe ci-dessus, on obtient $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f}{Q_c} S_c$. Comme $Q_c > 0$ et $S_c \geq 0$, on a $\eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$.

b. Modélisation du cycle moteur réel

3. Par définition $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Par ailleurs, pour un gaz parfait $H = U + pV = U + nRT$. Donc $C_p = \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR = C_v + nR$ (relation de Mayer). Ceci conduit à $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$.
4. On calcule la variation d'entropie sur un chemin réversible, donc quasi-statique, donc tel que le travail des forces de pression s'écrit $\delta W = -pdV$:

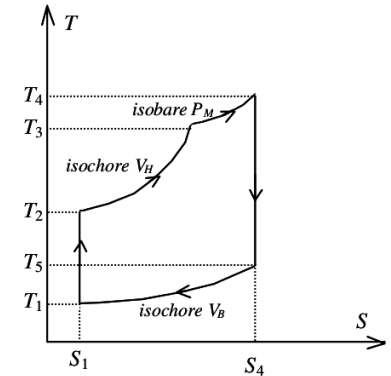
$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \frac{1}{T} (dU + pdV) = \frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = \frac{nR}{\gamma-1} d \ln(TV^{\gamma-1})$$

d'où en intégrant

$$S = S_0 + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) = S_0 + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{pV^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} \right) = S_0 + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T^\gamma p^{1-\gamma}}{T_0^\gamma p_0^{1-\gamma}} \right)$$

5. On applique les résultats précédents en préservant les formes en fonction de la température.
- phases adiabatiques quasi-statiques ($1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$) : le calcul précédent donne $dS = 0$ (lois de Laplace vérifiées), donc $S = S_1 \text{ ou } 4 = \text{cte}$ (droite verticale);
 - phases isochores ($2 \rightarrow 3$ et $5 \rightarrow 1$) : $S = S_2 \text{ ou } 5 + \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T}{T_2 \text{ ou } 5} \right)$;
 - phase isobare ($3 \rightarrow 4$) : $S = S_3 + \frac{\gamma nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T}{T_3} \right)$.

Ainsi, les isochores et les isobares apparaissent comme de courbes logarithmiques de S en fonction de T , ces dernières ayant une pente plus forte pour un même point. Inversement ce sont donc des exponentielles pour T en fonction de S , les isochores étant de pente plus forte en un même point. Ceci conduit à l'allure ci-contre pour le cycle dans le plan (T, S) :



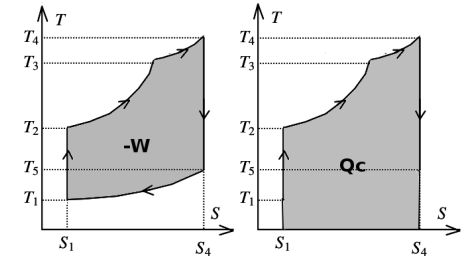
6. On a $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$ donc $Q_{\text{rev}} = \int_{\text{chemin}} T dS$. Il s'agit bien de l'aire algébrique sous les courbes des transformations.

Ici on a plus particulièrement $Q_c = \int_2^4 T dS$, et $Q_f = \int_5^1 T dS$. Donc

$$Q_c + Q_f = -W = \oint_{\text{cycle}} T dS,$$

l'aire du cycle représente l'opposé du travail reçu.

Par conséquent le rendement $\eta = -\frac{W}{Q_c}$ est visualisé par le rapport entre l'aire du cycle et l'aire sous la courbe 2 \rightarrow 4.



c. Paramétrage du cycle

7. Pour les isochores, $Q = \Delta U$ alors que pour les isobares, $Q = \Delta H$. D'où

$$Q_{23} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_3 - T_2), \quad Q_{34} = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} (T_4 - T_3) \quad \text{et} \quad Q_{51} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_5).$$

8. Comme $\eta = 1 + \frac{Q_{51}}{Q_{23} + Q_{34}}$, on en déduit $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_5}{T_3 - T_1 + \gamma(T_4 - T_3)}$.
9. • $1 \rightarrow 2$ vérifie les lois de Laplace (isentropique), d'où $T_2 = T_1 a^{\gamma-1}$.
- $2 \rightarrow 3$ est isochore, donc $\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2}$ d'où $T_3 = T_2 b = T_1 b a^{\gamma-1}$.
- $3 \rightarrow 4$ est isobare, donc $\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_3}{T_3}$, d'où $T_4 = T_3 r = T_1 r b a^{\gamma-1}$.
- $4 \rightarrow 5$ vérifie les lois de Laplace (isentropique), donc $T_5 = T_4 \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^{\gamma-1} = T_4 \left(\frac{r}{a} \right)^{\gamma-1}$, d'où $T_5 = T_1 b r^\gamma$.
10. En réinjectant ces relations, on en déduit $\eta = 1 + \frac{1 - b r^\gamma}{a^{\gamma-1} (b - 1 + \gamma b (r - 1))}$.

11. On obtient $\eta = 0,56$.

12. On obtient $T_4 = 2,7 \times 10^3$ K.

En admettant que le cycle soit parcouru de façon réversible, nécessairement il faut que le système ait une température proche de celle de la source avec laquelle il échange. Ici on suppose donc que T_4 joue le rôle de T_c et T_1 celui de T_f . D'où $\eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_1}{T_4} \approx 0,89$.

I.2. Aspects mécaniques du moteur

a. Cinématique du piston

13. Par projection sur Oy on a $B \sin \varphi = -L \sin \theta$ (angles orientés).

Par projection sur Ox on obtient : $x = L \cos \theta + B \cos \varphi$, d'où $x = L \cos \theta + \sqrt{B^2 - L^2 \sin^2 \theta}$.

14. La hauteur du cylindre a augmenté de $B + L - x$, donc $V = V_H + S(B + L - x)$, d'où

$$V = V_H + S(B + L - L \cos \theta - \sqrt{B^2 - L^2 \sin^2 \theta}).$$

En particulier on retrouve en $\theta = \pi$ que $V_B = V_H + S(B + L + L - B) = V_H + 2LS$, donc $C = 2LS$.

15. Il suffit de dériver l'expression de x précédente : $v_p = \dot{x} = -L\dot{\theta} \sin \theta - \frac{L^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{B^2 - L^2 \sin^2 \theta}}$.

16. On a donc $h^2 = 0,125 \ll 1$, ce qui nous permet de développer l'expression précédente :

$$v_p = -L\dot{\theta} \sin \theta - \frac{Lh\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \theta}} \approx K_1 \sin \theta + K_2 \sin 2\theta \quad \text{avec} \quad K_1 = -L\omega \quad \text{et} \quad K_2 = -\frac{1}{2}Lh\omega.$$

17. En redérivant (à ω constant) on obtient $a_p = -L\omega^2 (\cos \theta + h \cos 2\theta)$.

b. Modèle dynamique du système { piston-bielle-vilebrequin }

18. La vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ étant constante, le référentiel du moteur est galiléen si le référentiel terrestre l'est aussi, ce que nous supposons. Dans ce référentiel nous appliquons le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) au piston¹, puis nous projetons selon Ox :

$$M a_P \vec{u}_x = \vec{F} + \vec{R}_{B/P} + \vec{R}_{C/P} - Mg \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad R_{B/P} = \frac{M(a_P + g) + (P - P_1)S}{\cos \varphi}.$$

19. D'après le principe des actions réciproques, $\vec{R}_{B/P} = -\vec{R}_{P/B}$ d'une part, et $\vec{R}_{B/V} = -\vec{R}_{V/B}$ d'autre part. D'après le TRC appliqué à la bielle de masse nulle, $\vec{0} = \vec{R}_{P/B} + \vec{R}_{V/B}$. On en déduit $\vec{R}_{B/V} = -\vec{R}_{B/P}$.

20. On a $\Gamma = \vec{u}_z \cdot R_{B/V} \vec{u} \wedge \vec{HO} = -L R_{B/P} \sin(-\pi + \theta - \varphi) = L R_{B/P} \sin(\theta - \varphi)$, d'où en développant et en réinjectant l'expression de $R_{B/P}$:

$$\Gamma = L ((P - P_1)S + M(a_P + g)) \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right).$$

21. En utilisant l'expression de a_P , et comme précédemment le fait que $\sin \varphi = -h \sin \theta$, et $h^2 \ll 1$ donc $\cos \varphi \approx 1$, on en déduit

$$\Gamma \approx L \left((P - P_1)S + Mg - ML\omega^2 (\cos \theta + h \cos 2\theta) \right) \left(\sin \theta + \frac{h}{2} \sin 2\theta \right).$$

En éliminant le terme d'ordre deux en h et en simplifiant les fonctions en θ on obtient finalement

$$\Gamma \approx \left((P - P_1)SL + Mg - \frac{1}{2}ML^2\omega^2 \sin 2\theta \right) + h \sin \theta \left((P - P_1)SL \cos \theta + ML^2\omega^2 \sin^2 \theta \right).$$

22. La figure montre que le moment est négatif pour $\theta \in [180^\circ; 280^\circ]$ (3^e quart de tour et un peu plus) puis pour $\theta \in [360^\circ; 440^\circ]$ (5^e quart de tour presque entier) et enfin pour $\theta \in [540^\circ; 720^\circ]$ (dernier demi-tour). **Pendant ces phases, le piston exerce un travail résistant sur le vilebrequin et donc freine la voiture.**

Ces phases ont lieu une fois que l'échappement a eu lieu et avant l'explosion, c'est-à-dire quand la pression dans le cylindre est faible. Elle est alors trop faible pour entraîner le vilebrequin.

23. La puissance mécanique fournie par l'ensemble des quatre pistons est $\mathcal{P}_m = 4\Gamma_m \omega = 52 \text{ kW}$.

1. sans oublier le poids qui n'était pas rappelé dans l'énoncé...

II. Objectif Lune

(d'après X PC 2015)

1. L'aller retour dure $\Delta t = 2,5 \text{ s}$ soit $2D = c\Delta t$ avec c la vitesse de la lumière. Il vient $D = \frac{c\Delta t}{2} = 3,8 \times 10^8 \text{ m}$.

II.1. Traversée de l'atmosphère

2. Le temps de parcours réel dans l'atmosphère s'écrit :

$$T_{\text{atm}} = \int_{\text{épaisseur de l'atmosphère}} \frac{dz}{v(z)}$$

où $v(z) = \frac{c}{n(z)}$ est la vitesse de la lumière à l'altitude z . En utilisant la méthode de détermination proposée à la ligne 10 (multiplication par c), il vient une distance :

$$D_{\text{err}} = c(T_{\text{atm}} + T_{\text{restant}}) = \int_{\text{épaisseur de l'atmosphère}} n(z) dz + D_{\text{hors atmosphère}}.$$

La distance réelle s'écrit :

$$D_{\text{réelle}} = \int_{\text{épaisseur de l'atmosphère}} dz + D_{\text{hors atmosphère}}.$$

En faisant la différence, il vient l'expression demandée.

3. Comme $n(z) - 1$ est proportionnel à $\rho(z)$, on a nécessairement $n(z) - 1 = \frac{n(0)-1}{\rho(0)} \rho(z)$ pour respecter la continuité en $z = 0$. On injecte aussi dans l'expression précédente l'équation de la statique des fluides, $d = -\rho g dz$, ainsi que l'équation d'état des gaz parfaits, $\rho_0 = \frac{MP(0)}{RT_0}$.

$$\begin{aligned} \delta D &= \int_{\text{épaisseur de l'atmosphère}} \frac{(n(0)-1)}{\rho(0)} \rho(z) dz \\ &= \int_{\text{épaisseur de l'atmosphère}} -\frac{RT_0(n(0)-1)}{gP(0)M} \frac{dP}{dz} dz \\ &= \int_{P_0}^0 \frac{RT_0(n(0)-1)}{gP(0)M} dP \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \delta D = (n_0 - 1)H \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

où H cela représente un ordre de grandeur de la taille caractéristique de l'atmosphère en le supposant isotherme.

4. $H = \frac{8,3 \times 290}{29 \times 10^{-3} \times 9,8} = \frac{83}{9,8} \approx 8,5 \text{ km}$, ce qui conduit à $\delta D = 2,5 \text{ m}$. L'ordre de grandeur est conforme à celui annoncé dans le texte.
5. Pour une tranche dz , la distance à parcourir est alors $\frac{dz}{\sin h}$, il faut donc **diviser l'expression précédente par $\sin h$** .

II.2. Analyse de la figure 2

6. La période de rotation de la Lune autour de la Terre est de 28 jours, donc durant les quelques heures d'observation, on peut la considérer comme fixe dans le référentiel géocentrique. Par contre, la rotation de la Terre sur elle-même (24h) qui rapproche puis éloigne l'observatoire de la Lune peut expliquer la variation Δt . $t_0 \approx 3 \text{ h}$.

7. Soit O la position de l'observation, T la position du centre de la Terre et L la position de la Lune. On choisit un système de coordonnées sphériques d'axe Oz l'axe de rotation de la Terre (on suppose qu'il correspond à la position du pôle Nord). On prend la référence des azimuts sur l'axe TL supposé fixe selon la question précédente. On note ϕ la latitude de O et ψ son azimut.

$$\begin{aligned} D &= OL = \|\vec{OL}\| = \|\vec{OT} + \vec{TL}\| \\ &= \sqrt{OT^2 + TL^2 + 2\vec{OT} \cdot \vec{TL}} \\ &= \sqrt{R_T^2 + TL^2 - 2R_T TL \cos(\phi) \cos(\psi)} \end{aligned}$$

Les distances TL et R_T permettent de faire l'approximation (à l'ordre 1) $R_T \ll TL$. Il vient :

$$D = TL - R_T \cos(\phi) \cos(\psi) \approx (TL - R_T \cos(\phi)) + \frac{R_T}{2} \cos(\phi) \psi^2$$

La dernière approximation s'obtient dans l'hypothèse $\psi \ll 1$.

Par ailleurs, la date t est reliée à la variation de ψ de telle sorte que $\psi(t_0) = 0$ (choix de l'origine dans la direction de TL) et $\dot{\psi} = \frac{2\pi}{T_T}$. On en déduit

$$\psi = \frac{2\pi}{T_T} (t - t_0).$$

Il vient finalement :

$$\Delta t = \Delta t(t_0) + \frac{(2\pi)^2 R_T}{c T_T^2} \cos(\phi) (t - t_0)^2 \quad \text{avec} \quad \Delta t(t_0) = 2(TL - R_T \cos(\phi)). \quad (1)$$

REMARQUES :

- La longueur TL est une constante qui ne sera pas utilisée par la suite. Elle n'est pas définie précisément dans l'énoncé, mais elle est de l'ordre de grandeur de D .
 - L'approximation $\psi \ll 1$ est assez critiquable sur une durée de 6h - on commet une erreur de 1/7 quand même).
8. $\Delta t(t_0 = 3h) = 2,638s$ et $\Delta t(t = 4h55) = 2,6412s$, soit :

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{c T_T^2}{(2\pi)^2 R_T} \frac{(\Delta t - \Delta t(t_0))}{(t - t_0)^2} \\ \cos(\phi) &= \frac{3 \times 10^8 \times (24 \times 3600)^2}{4 \times 3,14^2 \times 6,4 \times 10^6 (6900)^2} \quad 0,0032 \\ &= \frac{3 \times (1,44 \times 6)^2}{4 \times 3,14^2 \times 6,4 (6,9)^2} \quad 3,2 \cdot 10^1 = (0,78)^2 = 0,60 \end{aligned}$$

soit en utilisant la table donnée : $\phi = \pm 53^\circ$. On ne peut savoir a priori si l'on est dans l'hémisphère Nord ou Sud mais d'après le résumé, on attend une latitude dans le Sud de la France. On remarque que le calcul est relativement grossier car on se trouve plutôt au Nord de la France.

(Note : une régression linéaire donne $\phi = \pm 53^\circ$)

II.3. Analyse de la figure 3

9. Hypothèses menant à une trajectoire elliptique :
- Les planètes sont à symétrie sphérique ;
 - la seule interaction considérée est l'attraction gravitationnelle de la Terre sur la Lune ;
 - la masse de la Terre est grande devant celle de la Lune et donc le référentiel géocentrique est considéré galiléen.

REMARQUE : La dernière hypothèse n'est pas en fait nécessaire à condition de travailler dans le référentiel du centre de masse (hors programme).

10. L'excentricité non nulle de la trajectoire elliptique conduit à une variation de la distance Terre-Lune.
11. $T = 28$ jours. $\Delta t_{max} = 2,67s$ et $\Delta t_{min} = 2,42s$ or $a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = c \frac{\Delta t_{max} + \Delta t_{min}}{4}$ soit $a = 3,8 \times 10^8 m$.
En utilisant l'équation de la conique, il vient $r_{min} = \frac{p}{1+e}$ et $r_{max} = \frac{p}{1-e}$ d'où $e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{min} + r_{max}}$ soit $e = 0,05$.
Cette valeur proche de 0 est compatible avec l'hypothèse d'une trajectoire circulaire.

REMARQUE : De nouveau nous négligeons dans ce calcul le rayon terrestre devant D .

12. Si l'on considère que les mesures ne peuvent se faire que la nuit (rapport signal sur bruit trop faible en journée à cause du soleil), les époques de nouvelles Lune ne permettent pas de mesure car la Lune est au dessous de l'horizon la nuit. Cela pourrait aussi être un problème météo.

II.4. Tests physiques

13. La force est toujours centrale : le **moment cinétique est conservé**.
14. Le PFD appliqué à la Lune dans le référentiel géocentrique s'écrit (en projection sur \vec{e}_r) :

$$-M_L D \omega_L^2 = -\frac{GM_L M_T}{D^2}$$

A ce stade, il faut éliminer D qui peut aussi varier si G varie. Pour cela on utilise la conservation du moment cinétique : on a $D^2 \omega_L = \frac{L_{Lune}}{M_L}$ avec L_{Lune} le moment cinétique de la Lune. On peut alors éliminer la distance D :

$$\omega_L^{1/2} = \frac{GM_T}{L_{Lune}^{3/2}} \quad (2)$$

Une diminution de G implique donc bien une diminution de ω_L .

Prenons le logarithme de l'expression : $\frac{1}{2} \ln(\omega_L) = \ln(G) + \text{cste}$. En différenciant et en assimilant la différentielle à une variation, il vient

$$\frac{\Delta \omega_L}{\omega_L} = 2 \frac{\Delta G}{G}$$

Une variation relative de G est de 1% donne **une variation relative de la vitesse angulaire de 2%**.

REMARQUE : Si on en reste à la loi de Kepler ci-dessus, et qu'on la différencie logarithmiquement à D constant (ce qui n'est pas exact), on trouve $\omega_L^2 = \frac{GM_T}{D^3} \Rightarrow \frac{\Delta \omega_L}{\omega_L} = \frac{1}{2} \frac{\Delta G}{G} = 0,5\%$.

15. Le PFD montre que le produit $D^3 \omega_L^2$ est une constante. En prenant à nouveau le logarithme et en différenciant, il vient :

$$\Delta D = -\frac{1}{3} \frac{D}{\omega_L^2} \Delta \omega_L^2 \quad (3)$$

Si $\Delta \omega_L^2 < 0$, il vient $\Delta D > 0$ soit un éloignement. De plus :

$$\begin{aligned} \Delta D &= -\frac{1}{3} \frac{D^4}{GM_T} \Delta \omega_L^2 = -\frac{1}{3} \frac{D^4}{g R_T^2} \Delta \omega_L^2 \\ &= \frac{(3,8 \times 10^8)^4 \times (24 \times (4,8 \times 10^{-6} \times \frac{10^{-2}}{3,1 \times 10^7})^2)}{9,81 \times (6,4 \times 10^6)^2} \\ &= 1 \times 10^{-9} \text{ m.s}^{-1} \\ &= \underline{3 \times \text{cm.an}^{-1}} \end{aligned}$$

C'est donc cohérent avec les données de l'énoncé.