MÉCANIQUE - THERMODYNAMIQUE

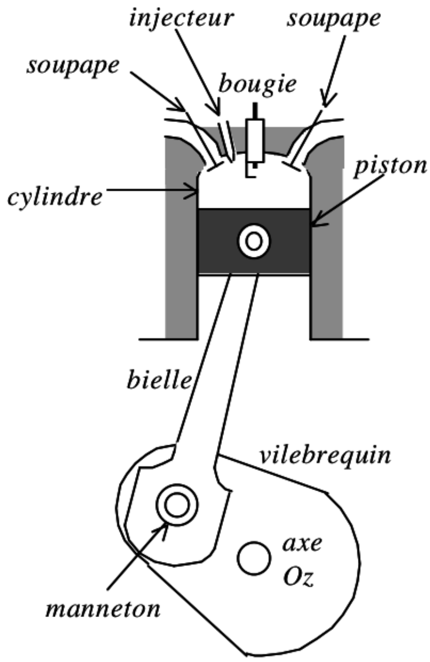
CALCULATRICES INTERDITES

On effectuera toutes les applications numériques à la main avec un seul chiffre significatif (ou plusieurs si nécessaire).
Il est demandé de rédiger les deux parties sur des copies séparées.

I. Etude d'un moteur à injection

Le problème proposé étudie le fonctionnement d'un moteur automobile à allumage commandé. Les deux sous-parties qui le composent sont indépendantes, mais il est souhaitable que le problème soit traité dans l'ordre de sa présentation pour une meilleure compréhension d'ensemble du sujet.
La section **I.1** étudie les aspects thermodynamiques du moteur à combustion interne à injection.
La section **I.2** s'intéresse à certains aspects mécaniques de la conversion translation-rotation de la chaîne piston-bielle-vilebrequin.
Il est vivement conseillé de traiter chaque sous-partie sur des copies séparées.

Le moteur étudié est un moteur atmosphérique à quatre cylindres en ligne. Dans chaque cylindre (cf figure ci-contre), un piston métallique alternatif coulisse entre le *point mort haut* (PMH) où le volume de la chambre de combustion $V = V_H$ est minimal, et le *point mort bas* (PMB) où le volume $V = V_B$ est maximal.
L'allumage du mélange air-carburant est déclenché par les étincelles électriques produites entre les électrodes des quatre bougies.
L'air est aspiré dans le cylindre (PMH → PMB, soupape d'admission ouverte, soupape d'échappement fermée), puis comprimé (PMB → PMH, soupapes fermées). Le carburant est injecté et allumé, poussant le piston au PMB, puis les gaz sont expulsés (PMB → PMH, soupape d'échappement ouverte).
Pour simplifier, on suppose la pression P dans le cylindre égale à la pression atmosphérique P_1 pendant l'admission et l'échappement.



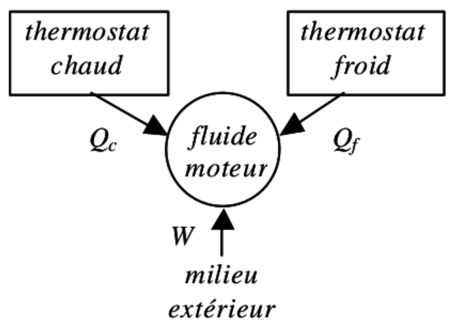
On notera $R = 8,3\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et $\mathcal{N}_A = 6 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ le nombre d'Avogadro.

I.1. Thermodynamique du moteur à allumage commandé

a. Cycle moteur ditherme théorique

On considère un système thermodynamique fluide subissant un cycle moteur fermé constitué de transformations successives quelconques. Au cours de ce cycle (cf figure ci-contre) :

- le système reçoit des transferts thermiques de deux thermostats, Q_f avec le thermostat froid à la température T_f, et Q_c avec le thermostat chaud à la température T_c ;
- le système reçoit un travail W de la part du milieu extérieur.



1. Ecrire les bilans d'énergie (premier principe) et d'entropie (second principe) pour un cycle entier. Déterminer, en le justifiant, les signes de Q_f, Q_c et W pour un cycle moteur.

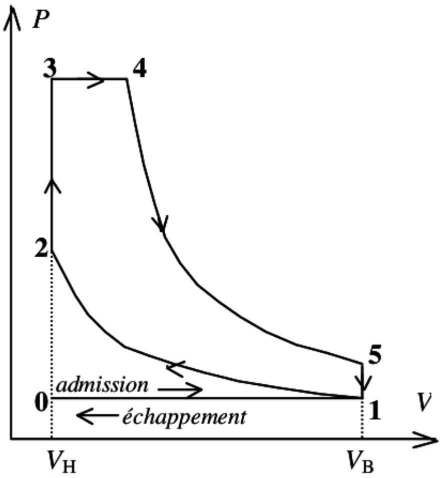
2. Définir le rendement énergétique η de ce cycle moteur, puis l'exprimer comme une fonction exclusive de Q_f et de Q_c.
Montrer que η est toujours inférieur à une valeur limite que l'on déterminera, ne dépendant que des températures T_f et T_c.

b. Modélisation du cycle moteur réel

Le moteur à allumage commandé est construit d'après les contraintes mécaniques suivantes :

- volume minimum de la chambre de combustion V_H ;
- volume maximum de la chambre de combustion V_B ;
- pression maximale tolérée P_M ;
- température maximale tolérée T_M.

Le système thermodynamique subissant le cycle moteur est constitué du mélange { air - essence - produits de combustion }, considéré comme *un gaz parfait* dont on supposera le nombre de moles n et les capacités thermiques molaires moyennes (C_{vm} et C_{pm}) constantes par souci de simplicité. De même, on néglige l'influence des phases { aspiration de l'air frais - refoulement des gaz d'échappement }.



On modélise le cycle par le cycle de SABATHE à 5 phases représenté ci-contre dans le diagramme de Watt :

- deux phases adiabatiques quasi-statiques ($1 \to 2$ et $4 \to 5$) ;
- deux phases isochores ($2 \to 3$ et $5 \to 1$) ;
- une phase isobare ($3 \to 4$).

L'objectif de ce paragraphe est la représentation du cycle dans un diagramme dit *entropique*, c'est-à-dire dans le plan (T, S) (température T en ordonnée, entropie S en abscisse).

3. Rappeler la définition du « coefficient adiabatique » γ. Retrouver l'expression des capacités thermiques molaires C_{vm} et C_{pm} pour un gaz parfait en fonction de γ.

4. Retrouver, en la justifiant, l'expression de l'entropie S d'un gaz parfait en fonction des variables d'état utiles parmi la pression P, le volume V et la température T. On pourra partir d'un état de référence quelconque (P_0, V_0, T_0) d'entropie S_0 supposée connue et calculer la variation $\Delta S = S - S_0$.

5. En déduire l'équation vérifiée par l'entropie S en fonction de la température T pour chacune des 5 phases du cycle ci-dessus.
Construire l'allure du cycle moteur dans le diagramme entropique (T, S).

6. Montrer que si le cycle s'effectue de manière réversible, l'aire sous les courbes représente les transferts thermiques. En déduire que le diagramme entropique permet de visualiser directement le rendement η du cycle. Indiquer comment par un schéma.

c. Paramétrage du cycle

On définit le *rapport volumétrique* d'un cylindre $a = \frac{V_B}{V_H}$, la surpression $b = \frac{P_3}{P_2}$ et le rapport de surchauffe $r = \frac{V_4}{V_H}$.

7. Exprimer les transfert thermiques Q_{23}, Q_{34} et Q_{51} en fonction des variations de température associées.

8. En déduire une expression du rendement η en fonction de γ et des 5 températures du cycle T_1 à T_5.

9. En exploitant les propriétés des transformations successives, exprimer les températures T_2 à T_5 en fonction de T_1 et des paramètres γ, a, b et r.

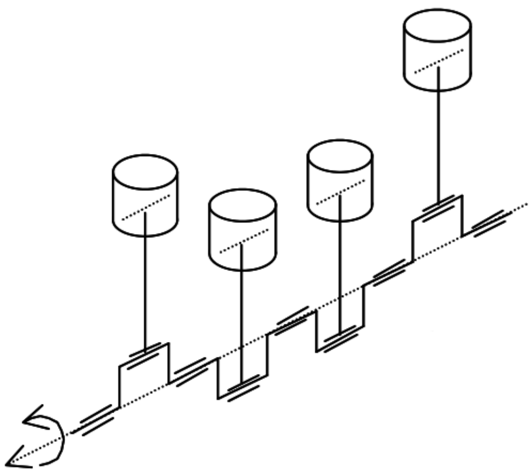
10. En déduire l'expression du rendement η en fonction de γ, a, b et r.

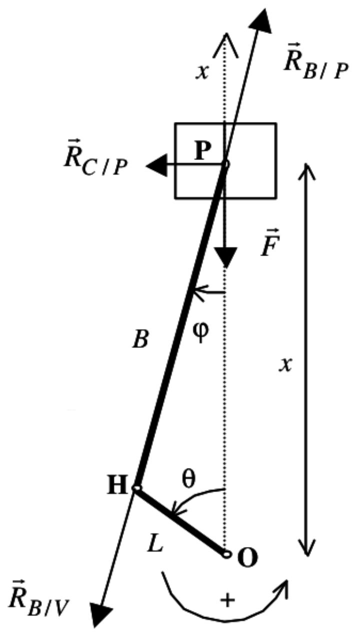
11. *Application numpérique :* pour ne pas dépasser P_M et T_M on impose $a = 9$, $b = 2,5$ et $r = 1,5$. Par ailleurs on suppose que $\gamma = 1,4$. Calculer η à deux chiffres significatifs près.
On donne $1,5^{1,4} = 1,8$ et $9^{0,4} = 2,4$.

12. Calculer la température T_4 si $T_1 = 27°$C. Quelle est alors la valeur du rendement maximal possible ?

I.2. Aspects mécaniques du moteur

Le système { piston-bielle-vilebrequin } est schématisé ci-dessous (schéma cinématique général à gauche, notations détaillées pour un cylindre à droite). Le vilebrequin d'axe Oz tourne autour de 5 paliers fixes et comporte 4 manetons distants de L de Oz, où s'articulent les pieds H des bielles, dont les têtes P sont liées aux pistons. Le vilebrequin est équilibré (en moment d'inertie) par des masselottes à l'opposé de H (non représentées).





a. Cinématique du piston

Chaque piston coulisse dans son cylindre suivant l'axe Ox perpendiculaire à Oz (figure ci-dessus à droite). Soit x la distance OP, B la longueur de bielle PH, θ l'angle de vilebrequin $(\widehat{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}})$ et φ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PH}})$. La vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ du vilebrequin est supposée constante.

13. Relier les sinus des angles θ et φ. En déduire x en fonction de B, L et θ uniquement.

14. Soit V_H le volume résiduel du cylindre au PMH lorsque $\theta = 0$, et S la section du cylindre (ou la surface du piston). Exprimer le volume V du cylindre en fonction de θ.
En déduire le volume V_B du cylindre au PMB quand $\theta = \pi$, et exprimer la cylindrée $\mathcal{C} = V_B - V_H$ en fonction de L et S ?

15. Exprimer la vitesse $v_P = \dot{x}$ du piston en fonction de B, L, θ et $\dot{\theta}$.

16. Le rapport $h = L/B$ valant 0,25, montrer que $v_P \approx K_1 \sin\theta + K_2 \sin 2\theta$ où K_1 et K_2 seront exprimés en fonction de L, h et ω.

17. En déduire l'accélération $a_P = \dot{v_P}$ du piston en fonction de L, h, θ et ω.

b. Modèle dynamique du système { piston-bielle-vilebrequin }

La masse du piston est M, celle de la bielle est négligée. La pression P dans le cylindre varie en fonction de V et donc de θ au cours du cycle moteur étudié à la section **I.1**. La pression extérieure partout ailleurs

est P_1.
On appellera $\vec{R}_{C/P}$ la réaction du cylindre sur le piston, normale à Ox (on néglige les frottements) ; $\vec{R}_{B/P}$ la réaction de la bielle sur le piston ; $\vec{R}_{B/V}$ la réaction de la bielle sur le vilebrequin ; $\vec{R}_{V/B}$ la réaction du vilebrequin sur la bielle et $\vec{F}$ la résultante des forces de pression sur le piston (cf figure ci-dessus). On admet que $\vec{R}_{B/P}$ et $\vec{R}_{B/V}$ sont nécessairement parallèles à la bielle si celle-ci est de masse nulle. Aussi, on définit le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{HP}}{B}$, et on pose

$$\vec{R}_{B/P} = R_{B/P}\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{R}_{B/V} = R_{B/V}\,\vec{u}\,,$$

de telle sorte qu'à l'instant qui est représenté sur la figure ci-dessus : $R_{B/P} > 0$ et $R_{B/V} < 0$.

18. Etablir l'expression de $R_{B/P}$ en fonction de M, S, P, P_1, a_P et φ.

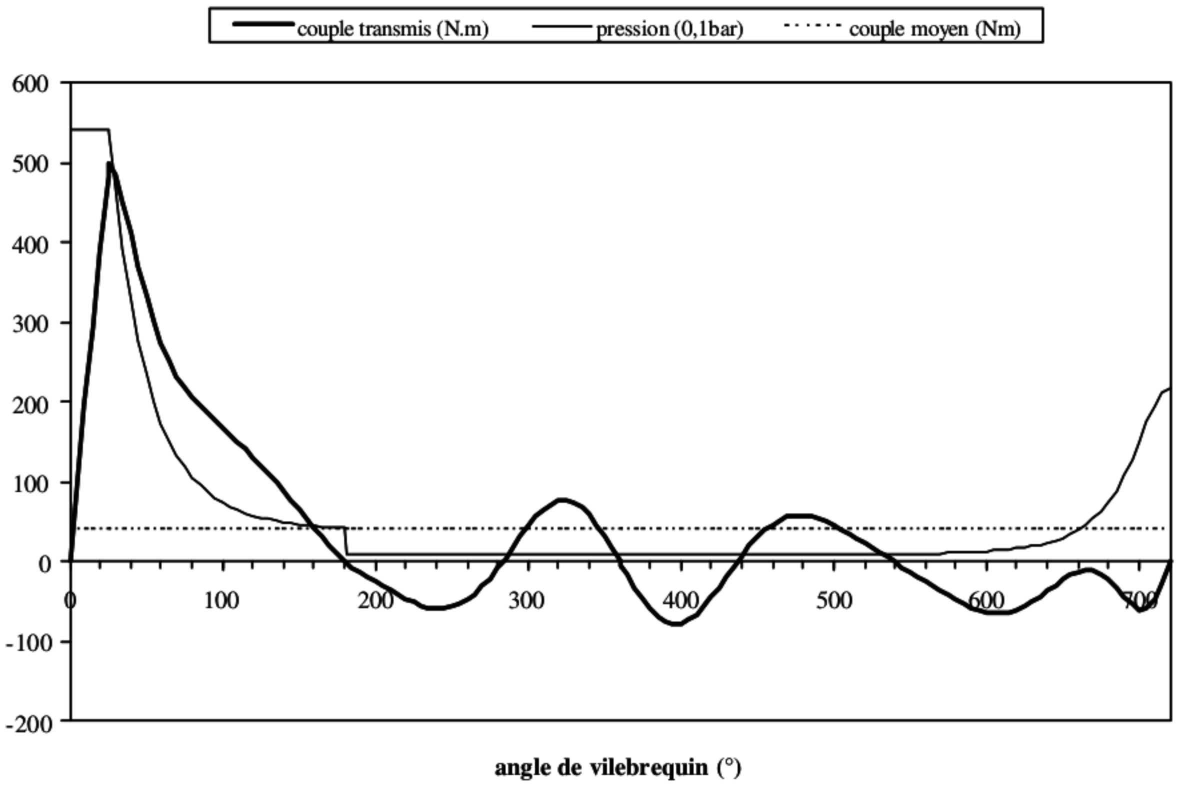
19. Quelle est la relation entre $\vec{R}_{B/V}$ et $\vec{R}_{B/P}$?

20. En déduire le moment algébrique Γ de l'action de la bielle sur le vilebrequin par rapport à l'axe de rotation Oz, en fonction de M, S, L, P, P_1, a_P, θ et φ (le sens positif étant le sens croissant de θ). Ce moment est égal au moment du couple transmis au vilebrequin par le cylindre à piston.

21. En prenant en compte les précédents résultats, réexprimer Γ en fonction de la seule variable θ puis linéariser l'expression en fonction de h.

22. La pression P dans le cylindre (suivant le modèle thermodynamique de la section **I.1**) et le moment Γ du couple transmis (calculé précédemment de façon approchée) sont représentés sur le graphe ci-dessous en fonction de θ pour un moteur de caractéristiques suivantes : $S = 40\,\text{cm}^2$, $V_H = 50\,\text{cm}^3$, $\omega = 3000\,\text{tours/min}$, $B = 20\,\text{cm}$, $L = 5\,\text{cm}$, $M = 500\,\text{g}$, avec $P_1 = 1\,\text{bar}$.
Le cylindre à piston exerce-t-il toujours une action motrice sur le vilebrequin ? Sinon, précisez à quels moments c'est le vilebrequin (donc la voiture) qui entraîne le piston.
Expliquer très succinctement.

23. La valeur moyenne du moment du couple transmis est $\Gamma_m = 41,6\,\text{Nm}$ par cylindre. En déduire la puissance mécanique moyenne développée par le moteur complet à ce régime de rotation.



II. Objectif Lune

Ce problème traite de la télémétrie laser appliquée à la mesure précise de la distance séparant la Terre de la Lune. Il se compose d'un texte de deux pages, de deux figures montrant les données expérimentales et de questions d'analyse et de compréhension auxquelles le candidat doit répondre. Ces questions sont regroupées en 4 parties indépendantes.

Commencez par lire attentivement le texte intitulé *La télémétrie laser-lune* **fournie en Complément**. Cela devrait vous prendre 15 à 20 minutes. (NOTE : une partie du texte à été supprimée pour le concours blanc).

Puis répondez aux questions ci-après. Elles ne sont pas forcément ordonnées par difficulté croissante et certaines d'entre elles ont une formulation ouverte. Dans ce cas, **toutes vos initiatives de résolution sont les bienvenues à condition de justifier et de détailler systématiquement votre démarche.** Si nécessaire, vous citerez précisément la partie du texte qui appuie votre raisonnement (les lignes sont numérotées de 1 à 236 à cet effet - le saut dans le décompte des lignes correspond aux parties supprimées pour le concours blanc).

Les réponses devront toujours être données sous forme littérale, puis, si la question le demande sous forme numérique. Si vous êtes amené à introduire des notations supplémentaires, leur signification devra être précisée clairement. Toutefois, les expressions littérales finales ne devront faire apparaître **que les grandeurs données dans l'énoncé** (Données utiles en préambule, données dans les questions et mesures faites sur les figures).

Données utiles pour l'analyse du texte

— Accélération de la pesanteur : $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$
— Constante des gaz parfaits : $R = 8,3\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$
— Célérité de la lumière : $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m.s^{-2}}$
— Masse molaire de l'air : $M = 29\,\mathrm{g.mol^{-1}}$
— Distance Terre-Soleil : $D_{TS} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
— Rayon de la Terre : $R_T = 6400\,\mathrm{km}$
— Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
— Période de rotation de la Terre sur elle-même : $T_T = 86400\,\mathrm{s}$
— Rayon de la Lune : $R_L = R_T/4$
— Masse de la Lune : $M_L = M_T/81$
— Une année dure $3,1 \times 10^7\,\mathrm{s}$
— Un angle d'une seconde d'arc correspond à $4,8 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad}$
— Le moment d'inertie d'une boule homogène de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par son centre est donnée par $I = \frac{2}{5}MR^2$

α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$	α	$\cos\alpha$
35°	0,819	40°	0,766	45°	0,707	50°	0,643	55°	0,574	60°	0,500
36°	0,809	41°	0,755	46°	0,695	51°	0,629	56°	0,559	61°	0,485
37°	0,799	42°	0,743	47°	0,682	52°	0,616	57°	0,545	62°	0,469
38°	0,788	43°	0,731	48°	0,669	53°	0,602	58°	0,530	63°	0,454
39°	0,777	44°	0,719	49°	0,656	54°	0,588	59°	0,515	64°	0,438

1. Estimer la distance D séparant la Terre de la Lune grâce aux données du début du texte.

II.1. Traversée de l'atmosphère

L'atmosphère terrestre est simplement assimilée à un gaz parfait de masse molaire M, dont la pression P, la température T, la masse volumique ρ et l'indice optique n dépendent de l'altitude z.

2. Montrez que la correction δD à apporter à la mesure de la distance D à cause de l'atmosphère, pour un tir vertical, se met sous la forme : $\delta D = \int_{\text{epaisseur de l'atmosphere}} (n(z) - 1)dz$

3. En exploitant d'une part le fait que en première approximation $n(z) - 1$ est proportionnel à $\rho(z)$, et d'autre part que l'atmosphère est supposée en équilibre hydrostatique dans un champ de pesanteur uniforme, exprimez δD en fonction de l'indice optique au sol n_0 (en $z = 0$) et d'une longueur H fonction de la température au sol T_0. Quelle est l'interprétation physique de H ?

4. Sachant que $n_0 - 1 = 3 \times 10^{-4}$ et $T_0 = 290$K, calculez H et δD. Comparez cette dernière valeur à celle indiquée dans le texte (ligne 176).

5. Comment l'expression de δD obtenue à la question **3.**. est-elle modifiée pour un tir incliné d'un angle $h > 0$ par rapport à l'horizontale ? (On gardera pour simplifier l'hypothèse d'une propagation rectiligne).

II.2. Analyse de la figure 2

Pour simplifier l'analyse, on suppose que l'orbite de la Lune est contenue dans le plan de l'équateur terrestre et que le réflecteur est au centre de la face visible de la Lune. On suppose aussi que la Lune tourne autour de la Terre dans le même sens que la Terre autour d'elle-même. On note ϕ la latitude où se trouve le télescope.

6. Quelle est la principale cause de la variation de la durée aller-retour Δt représenté sur la figure 2 ? *On n'attend pas ici une réponse quantitative.* A quel instant t_0 la Lune est-elle au plus haut dans le ciel de l'observatoire ?

7. Montrez que Δt s'écrit comme un polynôme du second degré en $(t - t_0)$ si $(t - t_0) \ll T_T$. On pourra commencer par exprimer la dépendance temporelle de l'angle d'azimuth Ψ (longitude).

8. En déduire une estimation de la latitude de l'observatoire grâce à la figure 2 et à la table de trigonométrie fournie au début du problème. Commentez.

II.3. Analyse de la figure 3

Dans cette analyse, on considère que l'orbite de la Lune est une ellipse d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où r est la distance Terre-Lune et θ l'angle repérant la direction de la Lune dans le plan de son orbite. Le paramètre p et l'excentricité e sont des constantes.

9. Quel est le cadre d'hypothèses qui permet d'obtenir cette orbite ?

10. Quelle est la cause principale des variations de la durée d'aller-retour représentée figure 3 ?

11. Grâce à la figure 3, estimez la période de révolution T ainsi que le demi-grand axe a et l'excentricité e de son orbite.

12. Quelles explications peut-on donner à l'absence d'observations entre les jours 27 et 43 ?

II.4. Tests physiques

13. On suppose que la constante de gravitation universelle G varie lentement au cours du temps (ligne 211-216) et on en étudie les conséquences sur l'orbite de la Lune. Quelle quantité reste conservée ?

14. On suppose que l'orbite de la Lune est approximativement circulaire. Expliquer pourquoi une diminution de G se traduit par un ralentissement de la vitesse angulaire de la Lune. Quelle est la variation relative de la vitesse angulaire si celle de G est de 1% ?

15. G est maintenant supposée constante. Montrer qu'à la décélération séculaire (diminution de la vitesse angulaire) de -24 secondes d'arc par siècle au carré (ligne 219) est associé un changement de distance de la Lune. S'éloigne-t-elle ou se rapproche-t-elle ? De quelle distance chaque année ?

* * * Fin de l'épreuve - Document en Annexe * * *