

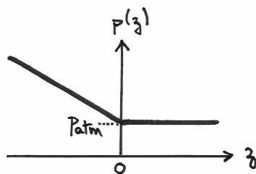
THERMODYNAMIQUE

I. Plongée sous-marine

I.1. Plongée en apnée

1.

$$dp = -\rho g dz \Rightarrow \boxed{p(z) = p_{\text{atm}} - \rho g z} \text{ pour } z < 0 \text{ et } \boxed{p(z) = p_{\text{atm}}} \text{ pour } z \geq 0.$$



$$2. nRT = p_{\text{atm}} V_M = p(z) V(z) \Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{p_{\text{atm}}}{p_{\text{atm}} - \rho g z} V_M}. \text{ Donc } \underline{V(z = -20 \text{ m}) = 1,4 \text{ L}}.$$

3. La flottabilité est la somme algébrique du poids et de la force d'archimède : $F = -mg + \rho g(V_0 + V(z))$. Elle diminue lorsque la profondeur augmente car la pression augmente donc le volume d'eau déplacé diminue, et donc la force d'archimède diminue.

4. On remplace m par $m + m_1$ dans l'expression ci-dessus, et on pose que $F = 0$ à $z = -5 \text{ m}$, ce qui donne

$$\boxed{m_1 = \rho \left(V_0 + \frac{V_M}{1 - \rho g z / p_{\text{atm}}} \right) - m} = \underline{1,7 \text{ kg}}.$$

I.2. Plongée avec bouteille : utilité du détendeur

$$5. \text{ On obtient } \boxed{n_i = \frac{pV_b}{RT_a}} = 99 \text{ mol et } \boxed{n_s = \frac{p_s V_b}{RT_e}} = 2 \text{ mol}.$$

6. En notant k le nombre d'inspirations total, et $n_0 = \frac{p(z)\Omega_0}{RT_e}$ la quantité consommée à chaque inspiration,

$$\text{on } \Delta t_s(z) = \frac{k}{f} \text{ et } k = \frac{n_i - n_s}{n_0} \text{ d'où } \boxed{\Delta t_s = \frac{(n_i - n_s)RT_e}{f(p_{\text{atm}} - \rho g z)\Omega_0}} = \underline{32 \text{ min } 22 \text{ s}}.$$

7. En surface il faut changer la pression et la température : $\frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = \frac{T_e}{T_a} \frac{p_{\text{atm}}}{p_{\text{atm}} - \rho g z} = \underline{0,33}$. La durée d'utilisation est divisée par trois en profondeur par rapport à la surface.

I.3. Plongée avec bouteilles : hyperoxie et ivresse des profondeurs

$$8. \text{ On a } p_i = n_i \frac{RT}{V} = \frac{n_i}{n_1 + n_2} (n_1 + n_2) \frac{RT}{V} \text{ d'où } \boxed{p_i = x_i p}.$$

9. a) Notons $p_{m1} = 1,5 \text{ bar}$ la pression en dioxygène à ne pas dépasser : $p_{m1} = x_{O_2}(p_{\text{atm}} - \rho g z_{\text{min}})$. D'où

$$\text{la profondeur à ne pas dépasser : } \boxed{z_{\text{min}} = \frac{p_{\text{atm}} - p_{m1}/x_{O_2}}{\rho g}} = \underline{-66 \text{ m}}.$$

b) Notons $p_{m2} = 4,0 \text{ bar}$ la pression en diazote à ne pas dépasser, on obtient de même : $\boxed{z_{\text{min}} = \frac{p_{\text{atm}} - p_{m2}/x_{N_2}}{\rho g}} = \underline{-41 \text{ m}}.$

II. Fuites thermiques par les vitres d'une habitation

1. En régime permanent, la température de l'habitation $T(t) = T_p$ ne varie plus car les puissances du radiateur et des pertes s'annulent parfaitement :

$$\frac{U^2}{r} = k(T_p - T_{\text{ext}})\Sigma \Rightarrow \boxed{T_p = T_{\text{ext}} + \frac{U^2}{rk\Sigma}}$$

Pour les conditions données il faut donc imposer une résistance $\boxed{r = \frac{U^2}{k(T_p - T_{\text{ext}})\Sigma}} = \underline{493 \Omega}$.

2. Le premier principe s'écrit pour le système constitué de l'habitation entre t et $t + dt$:

$$U(t + dt) - U(t) = dU = \delta W + \delta Q = \frac{U^2}{r} dt - k(T - T_{\text{ext}})\Sigma dt \text{ avec } dU = C dT$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{\tau} T_p} \text{ avec } \tau = \frac{C}{k\Sigma} = \underline{4 \text{ h } 57 \text{ min}}.$$

3. En appliquant les conditions initiales, la solution s'écrit : $\boxed{T(t) = (T(0) - T_p) e^{-\frac{t}{\tau}} + T_p}$.

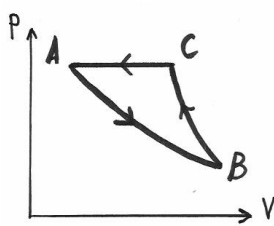
4. On peut diminuer la taille des fenêtres (Σ , cf les pays montagneux où les fenêtres sont petites), ou diminuer k en utilisant des vitrages multiples (double ou triple), séparés par de l'air ou un gaz raréfié.

III. Transformation cyclique d'un gaz parfait

1. Pour un gaz parfait, on a $H = U + pV = U + nRT$. Donc $C_p = \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR = C_v + nR$ (relation de Mayer). Par ailleurs $C_p = \gamma C_v$, donc $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$.

2.

- de A à B : $p = \frac{nRT_A}{V}$;
- de B à C : $p = p_B \frac{V_B^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{V^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$ (loi de Laplace);
- de C à A : $p = p_C = p_A$.



3. • Etat A : $p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 1,98 \text{ bar}$.
- Etat B : $T_B = T_A$ donc $p_B = \frac{nRT_A}{V_B} = 0,50 \text{ bar}$.
- Etat C : $p_C = p_A$ donc $V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_B \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 18,6 \text{ L}$, et $\frac{T_C}{T_A} = \frac{V_C}{V_A}$ donc $T_C = T_A \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 443 \text{ K}$.
4. • isotherme quasi-statique de A à B (cf cours) : $W_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_B} = -3,43 \text{ kJ}$;
- adiabatique quasi-statique de B à C (cf cours) : $W_{BC} = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$ donc $W_{BC} = \frac{nRT_A}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = 3,01 \text{ kJ}$;
- isobare de C à A : $W_{CA} = -p_A(V_A - V_C)$ d'où $W_{CA} = nRT_A \left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = (\gamma - 1) W_{BC} = 1,20 \text{ kJ}$.

5. Sur le cycle entier, le premier principe s'écrit

$$\Delta U = 0 = W + Q \quad \text{avec} \quad W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} \quad \text{et} \quad Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}.$$

6. • de A à B : la transformation étant isotherme, $\Delta_{AB}U = 0$ donc $Q_{AB} = -W_{AB} = 3,43 \text{ kJ}$ (la détente au contact du thermostat requiert un apport d'énergie de la part du thermostat);
- de B à C : la transformation est adiabatique donc $Q_{BC} = 0$;
- de C à A : on peut faire
- soit un calcul direct par $Q_{CA} = \Delta_{CA}U - W_{CA} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_C) - W_{CA}$;
 - soit appliquer $Q_{CA} = \Delta_{CA}H = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}(T_A - T_C)$ pour une transformation isobare;
 - soit réutiliser la relation du ?? et les précédentes, ce qui donne $Q_{BC} = -W_{AB} - W_{BC} - W_{CA} - Q_{AB}$;
- d'où en simplifiant : $Q_{CA} = -\gamma W_{BC} = -4,21 \text{ kJ}$ (le gaz se refroidit pour se contracter à pression constante).

IV. Pression sur un culot de bouteille

On ne peut ici utiliser le principe d'Archimède car le cône n'est pas totalement immergé.

On calcule la différence entre la force de l'eau au dessus du cône et celle de l'air situé sous le cône. Par symétrie autour de l'axe de révolution du cône, on voit que la force est selon \vec{u}_z . Donc en notant α le demi angle au sommet du cône, vérifiant $\tan \alpha = \frac{R}{h}$, on projette $d\vec{S}$ selon \vec{u}_z et on obtient

$$\vec{F} = \iint_{\text{cône}} (p(z) - p_0) d\vec{S} = \vec{u}_z \sin \alpha \iint_{\text{cône}} (p(z) - p_0) d^{(2)}S$$

Ensuite on explicite l'élément $d^{(2)}S$. On adopte les coordonnées cylindriques. Compte-tenu de la symétrie de révolution, on peut directement prendre une surface élémentaire d'ordre 1 $d^{(1)}S$ constituée d'une bande de cône contenue entre les sections planes $z = \text{cte}$ et $z + dz = \text{cte}$ ¹

$$\vec{F} = \vec{u}_z \sin \alpha \int_{z=0}^{z=h} (p(z) - p_0) d^{(1)}S.$$

Cette bande a une longueur (une fois découpée et mise à plat) $2\pi r$ avec $\tan \alpha = \frac{r}{z}$ si on choisit l'origine $z = 0$ au sommet du cône, et un axe Oz descendant. Sa largeur est oblique et vaut $\frac{dz}{\cos \alpha}$. Finalement $d^{(1)}S = 2\pi r \frac{dz}{\cos \alpha}$, ce qui conduit à

$$\vec{F} = \vec{u}_z 2\pi \tan^2 \alpha \int_0^h (p(z) - p_0) z dz.$$

La loi de l'hydrostatique dans la bouteille avec l'origine au sommet du cône et l'axe descendant s'écrit $p(z) = p_0 + \rho g(z + H - h)$, d'où

$$\vec{F} = \vec{u}_z \rho g 2\pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (z + H - h) z dz.$$

Finalement après simplification on obtient

$$\vec{F} = \rho g \pi R^2 \left(H - \frac{h}{3}\right) \vec{u}_z \quad \text{de norme} \quad F = 3,5 \text{ N}.$$

On remarque que l'expression littérale est correcte car elle représente exactement le poids de la colonne d'eau surplombant le cône (différence entre le volume d'un cylindre de hauteur H et celui d'un cône de hauteur h), le poids de la colonne d'air au dessus de l'eau étant compensé par l'air présent sous le cône.

1. Ceci revient à intégrer selon la variable θ ...