MÉCANIQUE

I. Satellites *(d'après CCP - MP 2014)*

1. La masse M exerce sur la masse m la force $\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}Mm\,\dfrac{\overrightarrow{OP}}{r^3}}$.

On applique le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen, au point O fixe :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(O)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}}.$$

Ainsi, le mouvement est inclu dans le plan orthogonal à $\vec{\sigma}(O)$ passant par O.

2. En coordonnées polaires, $\vec{\sigma}(O) = r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = m\,r^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z = \overrightarrow{\text{cte}}$, donc $\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}}$.

3. a) On a $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}$. On obtient $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{C}{r^2}$ puis $\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{C}{r^2}\right)\frac{C}{r^2}$. Puis en remplaçant par u, ceci conduit à $\boxed{a_r = -C^2u^2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)}$.

b) On pose $\boxed{K = \mathcal{G}Mm}$. Le principe fondamental de la dynamique appliquer au satellite conduit après simplification par u^2 à

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2} = \frac{1}{p} \quad\Longrightarrow\quad u = A\,\cos(\theta-\theta_0) + \frac{1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta-\theta_0)}}$$

avec $A > 0$ et θ_0 des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales et $e = pA$.

4. cf cours. $\boxed{E_p = -\dfrac{K}{r}}$ et $\boxed{E_m = E_c + E_p = \text{cte}}$.

5. a) En réinjectant la constante des aires dans l'énergie cinétique, on obtient $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}}$.

b) En $r = r_{\min}$ ou $r = r_{\max}$, on a $\dot{r} = 0$, d'où

$$E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r} \Leftrightarrow \boxed{r^2 + \frac{K}{E_m}\,r - \frac{mC^2}{2E_m} = 0}$$

c) On a $r_{max} + r_{\min} = 2a$ donc d'après les coefficients du trinôme, ceci conduit à $2a = -\frac{K}{E_m}$, d'où $\boxed{E_m = -\dfrac{K}{2a}}$.

6. Pour des trajectoires circulaires autour du Soleil, le résultat précédent s'écrit $-\frac{K}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r}$ d'où $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_S}{r}}}$. On trouve $\underline{v_T = 29{,}8\,\text{km.s}^{-1}}$ et $\underline{v_M = 24{,}2\,\text{km.s}^{-1}}$. Ces valeurs reposent en particulier sur l'approximation d'un **problème à un corps** : seule l'interaction avec le Soleil est considérée, et ce dernier est considéré immobile. De plus les 2 astres sont considérés à **symétrie sphérique**. Enfin, l'**ellipticité** de la trajectoire est négligée alors que l'excentricité n'est pas nulle.

7. On a $\boxed{a = \frac{1}{2}(r_T + r_M)} = \underline{1{,}26\,\text{UA}}$. L'énergie étant conservée, on écrit

$$E_m = -\frac{K}{r_T + r_M} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{K}{r_T} \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_P = \sqrt{2\mathcal{G}M_s\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_T + r_M}\right)}} = \underline{32{,}8\,\text{km.s}^{-1}}.$$

8. Soit T la période de révolution de la sonde : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_S}{4\pi^2}$. Or $T = 2\Delta t$ donc $\boxed{\Delta t = \pi\sqrt{\dfrac{(r_T + r_M)^3}{8\mathcal{G}M_s}}} = \underline{259\,\text{j}}$.

9. La vitesse angulaire de Mars est constante et vaut $\frac{v_M}{r_M}$, donc $\boxed{\beta = \dfrac{v_M}{r_M}\,\Delta t} = \underline{136°}$.

10. Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué à la sonde conduit à $m\,r_0\omega^2 = \frac{\mathcal{G}m_M m}{r_0^2}$ d'où $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}m_M}{r_0^3}}} = \underline{1{,}00 \times 10^{-3}\,\text{rad.s}^{-1}}$.

11. Le TRC appliqué au module 1 (qui a la même vitesse angulaire que G) s'écrit $-\frac{m}{2}(r_0-h)\omega^2 = -\mathcal{G}m_M\frac{m}{2(r_0-h)^2} + R$. D'où en réinjectant le résultat précédent :

$$\boxed{R = \tfrac{1}{2}\mathcal{G}m_M m\left(\frac{1}{(r_0-h)^2} - \frac{r_0 - h}{r_0^3}\right) \approx \frac{3\mathcal{G}m_M mh}{2r_0^3}} = \underline{1{,}5 \times 10^{-2}\,\text{N}}.$$

Cette force est extrêmement faible ici (car h est petit) donc sans conséquence.
Remarque : Il s'agit d'une force de marée. A l'échelle d'un astéroïde ou d'un astre, elle peut causer sa dislocation.

II. Transport de charge par câble porteur *(d'après CCP - MP 2014)*

1. Par définition du barycentre C : $m_T\overrightarrow{C_3C} = m\overrightarrow{C_3C_1} + m\overrightarrow{C_3C_2} + m'\overrightarrow{C_3C_3} + M\overrightarrow{C_3C_4} = \vec{0} + \vec{0} + M\overrightarrow{C_3C_4}$, d'où $\boxed{d = \dfrac{M}{m_T}\,L} = \underline{1\,\text{m}}$.

2. Le câble étant fixe dans le référentiel d'étude, la relation de non-glissement s'écrit $\vec{v}_{I_1\in\mathcal{S}_1} = \vec{v}_{C_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{C_1I_1} = \vec{0}$, d'où $\boxed{v = -r\omega}$.

3. La liaison pivot est considérée parfaite donc $\mathcal{M}_{\text{pivot}\,\mathcal{S}_3}(C_1) = \vec{0}$. Donc le Théorème du Moment Cinétique (TMC) appliqué à $\mathcal{S}_1$ conduit à

$$j\dot{\omega} = -j\frac{\dot{v}}{r} = \vec{e}_z.(\mathcal{M}_{\text{pivot}\,\mathcal{S}_3} + \overrightarrow{C_1C_1} \wedge (m\vec{g}) + \overrightarrow{C_1I_1} \wedge (\vec{N_1} + \vec{T_1})) = 0 + 0 + rT_1 \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2 = -j\frac{\dot{v}}{r^2}}.$$

4. Le mouvement de C étant rectiligne uniforme, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué à $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$ s'écrit

$$m_T\vec{g} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{F} = \vec{0}$$

De plus $\dot{v} = 0$ donc $\boxed{T_1 = T_2 = 0}$. En projettant l'équation ci-dessus selon $\vec{e}_x$ d'une part et $\vec{e}_y$ d'autre part, on obtient

$$\boxed{F = m_Tg\sin\alpha} \quad\text{et}\quad \boxed{N_1 + N_2 = m_Tg\cos\alpha}. \tag{1}$$

5. Le système $\mathcal{S}_3$ étant en mouvement de translation, son moment cinétique en C_3 est nul. De plus les roues tournent à vitesse constante, donc leur moment cinétique est constant. Le TMC s'écrit alors

$$\vec{0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{pivot}\,\mathcal{S}_4}(C_3) + (2m + m')\overrightarrow{C_3C_3} \wedge \vec{g} + \overrightarrow{C_3I_1} \wedge \vec{N}_1 + \overrightarrow{C_3I_2} \wedge \vec{N}_2 + \overrightarrow{C_3H} \wedge \vec{F}$$

Les deux premiers moments sont nuls car la liaison pivot est parfaite et le point d'application du poids est C_3. Il reste

$$\vec{0} = (-\ell N_1 + \ell N_2 - hF)\vec{e}_z \Leftrightarrow \boxed{N_1 - N_2 = -\frac{h}{\ell}F = -\frac{h}{\ell}\,m_Tg\sin\alpha}. \tag{2}$$

6. D'après les Eqs. (1)-(2) on tire $\boxed{N_1 = \dfrac{m_Tg}{2}\left(\cos\alpha - \dfrac{h}{\ell}\sin\alpha\right)}$ et $\boxed{N_2 = \dfrac{m_Tg}{2}\left(\cos\alpha + \dfrac{h}{\ell}\sin\alpha\right)}$.

7. On note que la roue droite (en avant par rapport au mouvement) appuie plus fort sur le câble que la roue gauche car $N_1 < N_2$. Pour que le contact se maintienne sur la roue gauche on impose $N_1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < \arctan\left(\frac{\ell}{h}\right)} = \underline{59°}$, ce qui est vérifié. La pente du câble porteur ne doit donc pas être trop forte.

Exprimée sur h la condition s'écrit $\boxed{h < \frac{\ell}{\tan\alpha}} = \underline{0,87\,\mathrm{m}}$, ce qui est vérifié.

8. L'inertie de $\mathcal{S}_4$ se traduit par une résistance à la mise en mouvement, donc $\mathcal{S}_4$ est est incliné dans le sens opposé à l'accélération. On a donc $\boxed{\dot{v} < 0}$ sur le schéma.

9. Le TRC appliqué à $\mathcal{S}_4$ s'écrit : $M\dot{v}\,\vec{e}_x = \vec{R} + M\vec{g}$. Après projection on obtient $\boxed{T = M\,(\dot{v} + g\,\sin\alpha)}$ et $\boxed{N = Mg\,\cos\alpha}$.

10. De même, on admet que le TMC au barycentre C_4 s'écrit comme si il était fixe. $\mathcal{S}_4$ est en translation donc son moment cinétique est nul :

$$\vec{0} = \overrightarrow{C_4C_3} \wedge \vec{R} + \vec{0} = \overrightarrow{C_4C_3} \wedge (M\dot{v}\vec{e}_x - M\vec{g}) \Leftrightarrow g\sin\beta + \dot{v}\cos(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{\tan(\beta - \alpha) = -\frac{\dot{v}}{g\cos\alpha} - \tan\alpha}.$$

On obtient $\underline{\tan(\beta - \alpha) = -0,46}$.

11. Le TRC appliqué à $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$ s'écrit maintenant

$$m_T\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F} = m_T\dot{v}\vec{e}_x \quad \text{avec} \quad T_1 = T_2 = -j\frac{\dot{v}}{r^2},$$

d'où en projettant selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\boxed{F = m_T g\sin\alpha + (m_T + \frac{2j}{r^2})\,\dot{v}} = \underline{1,16 \times 10^3\,N} \quad \text{et} \quad \boxed{N_1 + N_2 = m_T g\cos\alpha}. \tag{3}$$

12. On souhaite de nouveau appliquer le TMC à $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ mais maintenant les roues accélèrent donc leur moment cinétique varie. Par relation de Chasles et symétrie des vitesses des points de la roue, on obtient : $\vec{\sigma_1}(C_3) = \vec{\sigma_1}(C_1) = j\omega\vec{e}_z = -j\frac{v}{r}\vec{e}_z$ (la dernière égalité étant valable hors glissement). De même $\vec{\sigma_1}(C_3) = -j\frac{v}{r}\vec{e}_z$. Le TMC donne alors :

$$-2j\frac{\dot{v}}{r} = \ell(N_2 - N_1) - hF \Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{h}{\ell}F + 2j\frac{\dot{v}}{r} = \frac{h}{\ell}\,m_T g\sin\alpha + \frac{h}{\ell}\left(m_T + \frac{2j}{r}\,(\tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{h})\right)\dot{v}$$

On en déduit

$$\boxed{N_1 = \frac{m_T g}{2}\left(\cos\alpha - \frac{h}{\ell}\sin\alpha\right) - \frac{h}{\ell}\left(\frac{m_T}{2} + \frac{j}{r}\,(\tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{h})\right)\dot{v}} \quad \text{et}$$

$$\boxed{N_2 = \frac{m_T g}{2}\left(\cos\alpha + \frac{h}{\ell}\sin\alpha\right) + \frac{h}{\ell}\left(\frac{m_T}{2} + \frac{j}{r}\,(\tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{h})\right)\dot{v}}.$$

Compte-tenu des signes obtenus pour les termes en $\dot{v}$, on voit que

- si $\dot{v} > 0$ alors on a toujours $N_1 < N_2$ et N_1 est plus petit que si $\dot{v} = 0$. Donc le système est encore plus sujet au décollement de la roue gauche. **La pente limite doit donc être encore plus faible. La roue gauche décolle si $\dot{v} > 0$ est trop grand.**
- si $\dot{v} < 0$, cela joue en faveur d'un rétablissement de l'équilibre entre N_1 et N_2 donc défavorise globalement le décollement, qui peut toutefois apparaître si la pente est trop forte ou si $|\dot{v}|$ est trop grand.

13. On a $|T_1| = |T_2| = j\frac{|\dot{v}|}{r}$ qui augmente avec $|\dot{v}|$. Par ailleurs, $|N_1| = N_1$ décroît avec $\dot{v}$ alors que $|N_2| = N_2$ croît avec $\dot{v}$. Donc en augmentant $|\dot{v}|$:

- si $\dot{v} > 0$ on a $|T_1|/N_1$ qui croît et $|T_2|/N_2$ qui décroît ou croît moins vite, donc **la roue gauche se mettra à glisser en premier** ;
- si $\dot{v} < 0$ c'est le contraire, **la roue droite se mettra à glisser en premier** (mais pour une accélération plus forte en valeur absolue).