MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Satellites

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel P, de masse m, placé dans le champ de gravitation newtonien engendré par une masse $M \gg m$. Cette dernière masse se situe à l'origine d'un repère $Oxyz$, et sera considérée comme immobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ associé au repère $Oxyz$. On note $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ la constante de gravitation universelle, et $r = ||\overrightarrow{OP}||$ la distance entre les deux masses.

1. Exprimer la force d'attraction subie par $P(m)$ sous l'effet de $O(M)$, en fonction de $\overrightarrow{OP}$, de r et des constantes du problème.
Montrer que le mouvement de P est plan.

2. On suppose alors que le mouvement de P se situe dans le plan xOy et on repère la position de P par ses coordonnées polaires r et $\theta = (\widehat{\vec{e}_x;\vec{e}_r})$ avec $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$.
Montrer que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante.

3. **a)** Démontrer la formule de Binet pour l'accélération radiale a_r en fonction de $u = \frac{1}{r}$.

b) En déduire par le principe fondamental de la dynamique que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{mC^2}{K}$$

où K est une constante à exprimer en fonction des données du problème, et e est une autre constante.

4. Montrer que le système $P(m)$ est conservatif, et établir l'expression de l'énergie potentielle E_p d'interaction entre O et P, en fonction de K et r. On prendra une valeur nulle à l'infini.

5. On se place dans le cas d'un état lié, la trajectoire est elliptique.

a) Exprimer l'énergie mécanique E_m de $P(m)$ en fonction de la seule variable $r(t)$.

b) En déduire que les distances respectivement minimale $r_{\min}$ et maximale $r_{\max}$ sont les racines d'un même trinôme du second degré qu'on explicitera.

c) Donner la relation existant entre le demi grand axe a de l'ellipse et les distances $r_{\min}$ et $r_{\max}$.
En déduire l'expression de E_m en fonction de K et a.

Les résultats précédents sont maintenant appliqués au système solaire. On suppose que les planètes Terre et Mars, de masses respectives $m_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $m_M = 6{,}42 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$, ont des trajectoires circulaires de rayons respectifs $r_T = 1,00\,\mathrm{UA}$ et $r_M = 1,52\,\mathrm{UA}$ (avec $1\mathrm{UA} = 1{,}50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$), dont le centre est le Soleil, de masse $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

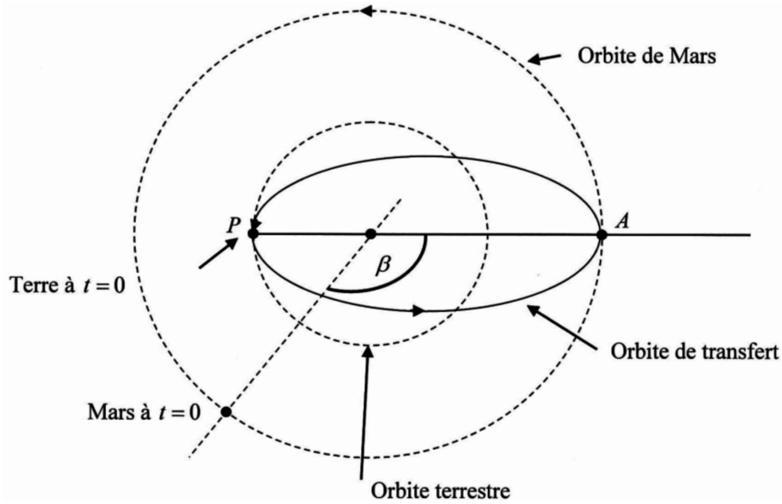
6. Calculer les vitesses orbitales v_T et v_M de la Terre et de Mars.
Sur quelle(s) approximation(s) reposent ces valeurs ?

Une sonde P de masse $m = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg}$ est en orbite autour de la Terre à une distance de son centre négligeable devant r_T. On souhaite la satelliser sur Mars. A l'instant $t = 0$, on ajuste la vitesse de la sonde de telle façon qu'elle devienne un satellite du Soleil. **Dans les deux prochaines questions on négligera donc l'attraction de la Terre et de Mars.** A $t = 0$, $\vec{v}_P$ est perpendiculaire à l'axe Terre-Soleil, et la position de chaque planète est indiquée sur la figure ci-dessous. On souhaite alors que la trajectoire elliptique soit tangente à celle de Mars au point A.

7. Quelle est la valeur du grand axe a de l'ellipse décrite ?
En déduire la valeur de la vitesse $||\vec{v}_P||$ à $t = 0$ par un raisonnement énergétique, en fonction de $\mathcal{G}$, M_S, r_T et r_M.
Application numérique.

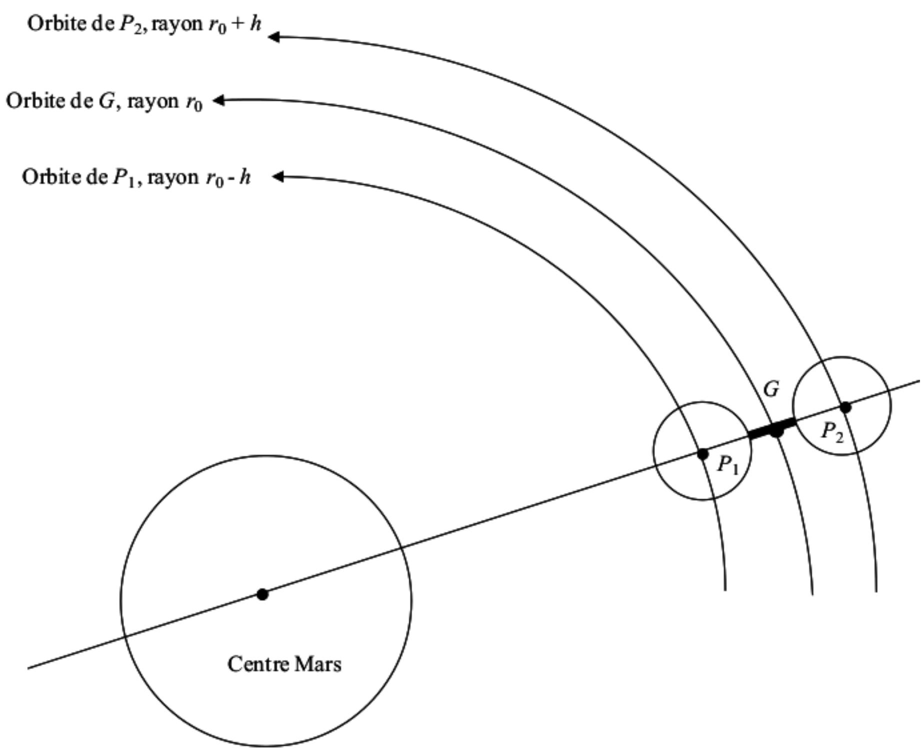
8. En appliquant la loi de Kepler, calculer la durée Δt du trajet de la sonde depuis la Terre vers Mars.

9. Déterminer l'expression de l'angle β en fonction de v_M, r_M et Δt. Application numérique (en degrés).



Trajectoires de la Terre, de Mars et de la sonde P autour du Soleil (positions indiquées à l'instant $t = 0$).

Par ajustement de la vitesse au point A, la sonde est alors placée en orbite circulaire autour de Mars, à une distance r_0 du centre de cette dernière. À partir de là, l'attraction de la Terre et celle du Soleil sur la sonde seront considérées comme négligeables. La sonde ne présentant pas de symétrie sphérique, on la modélise comme l'assemblage de deux modules sphériques de masse $\frac{m}{2}$, de barycentres P_1 et P_2, assemblés par une liaison de masse négligeable devant m. C'est donc le barycentre G de cet ensemble qui décrit la trajectoire circulaire de rayon r_0 autour de Mars. On pose $GP_1 = GP_2 = h$. De plus on considère un mouvement particulier pour lequel les points P_1, G et P_2 demeurent alignés avec le centre de Mars (voir figure ci-dessous).



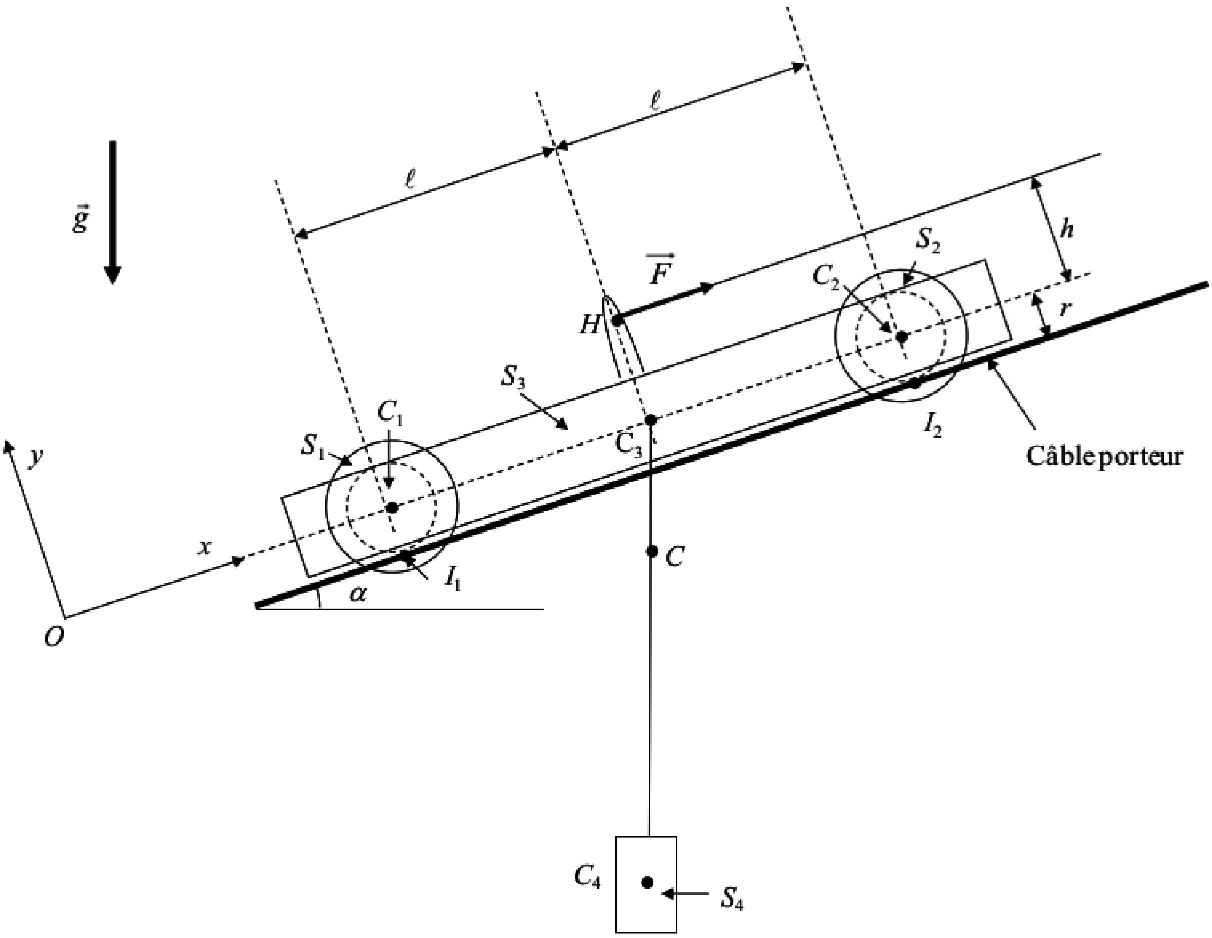
10. Etablir l'expression de la vitesse de rotation ω de la sonde autour de Mars, en fonction de m_M, r_0 et $\mathcal{G}$. Application numérique pour $r_0 = 3{,}5 \times 10^6$ m.

11. Pendant la courte durée de la mission autour de Mars, le référentiel lié à Mars est considéré approximativement galiléen. Le module de barycentre P_1 subit donc la force exercée par Mars (de point d'application approximatif P_1), ainsi que l'attraction du second module transmise par la liaison, qu'on notera $\overrightarrow{R} = R\,\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{2h}$. Etablir l'expression de R en fonction de m, m_M, $\mathcal{G}$, r_0 et h. Application numérique pour $h = 10$ m. La liaison de la sonde est-elle mise en péril par cette force ?

II. Transport de charge par câble porteur

On suppose l'existence d'un référentiel galiléen auquel est associé le repère orthonormé direct $Oxyz$, les vecteurs unitaires associés étant notés $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. Un dispositif de transport de charge par câble porteur est constitué des solides suivants (voir figure ci-dessous).

- $\mathcal{S}_1$: une roue de masse m, de centre de masse C_1, de moment d'inertie j (relativement à son axe de symétrie C_1z). Cette roue comporte une gorge périphérique, la distance située entre le fond de gorge et le point C_1 sera notée r. La liaison pivot est supposée idéale.
- $\mathcal{S}_2$: une seconde roue identique à la première, de centre de masse C_2.
- $\mathcal{S}_3$: une plateforme de liaison de masse m', de centre de masse C_3 (qui coïncide avec le milieu de C_1C_2).
- $\mathcal{S}_4$: le porte charge (et la charge) de masse M, de centre de masse C_4, de moment d'inertie J (relativement à l'axe C_3z), la tige C_3C_4 étant de longueur $L = C_3C_4$.



Les roues reposent sur un câble porteur incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Les solides $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ présentent tous le même plan moyen de symétrie, vertical, plan choisi pour la représentation ci-dessus.

$\mathcal{S}_3$ est soumis à l'action d'une force $\overrightarrow{F}$, due à un câble tracteur, de ligne d'action parallèle au câble porteur, d'intensité F, et de point d'application H (cf figure ci-dessus). On note $h = C_3H$ la distance séparant H de la ligne C_1C_2. On appelle C le centre de masse de l'ensemble $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$. Les points de contact des roues sur le câble sont notées respectivement I_1 et I_2. Ce sont également les points d'application des réactions du câble sur les roues, réactions qu'on écrira respectivement

$$\overrightarrow{R}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \overrightarrow{R}_2 = T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y\,.$$

Dans la suite, sauf mention contraire les roues seront supposées rouler sans glisser sur le câble porteur et on notera $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = v\,\vec{e}_x$ les vitesses instantanées respectives des points C_1, C_2 et C_3. On note g l'accélération due à la pesanteur et m_T la masse totale de l'ensemble.

Données : $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$, $\alpha = 30°$, $m = 20\,\mathrm{kg}$, $m' = 60\,\mathrm{kg}$, $M = 200\,\mathrm{kg}$, $\ell = C_1C_3 = C_3C_2 = 0,50\,\mathrm{m}$, $r = 0,2\,\mathrm{m}$, $h = 0,3\,\mathrm{m}$, $j = 0,5\,\mathrm{kg.m^2}$, $J = 250\,\mathrm{kg.m^2}$ et $L = 1,5\,\mathrm{m}$.

1. Déterminer la position de C en calculant $CC_3 = d$.

2. On note $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ les vitesses de rotation des roues. Etablir la relation de non glissement entre ω, v et r.

3. En appliquant le théorème du moment cinétique à $\mathcal{S}_1$ (ou $\mathcal{S}_2$), trouver les expressions de T_1 et T_2 en fonction de j, $\dot{v}$ et r.

Pour les questions **4.** à **7.**, on suppose une vitesse v positive et constante. On suppose également que $\mathcal{S}_4$ est au repos relativement à $\mathcal{S}_3$, les points C_4, C et C_3 se situant sur la même verticale.

4. Dans ces conditions, donner la valeur de T_1 et T_2.
En utilisant le théorème de la résultante cinétique, établir les expressions de F et $N_1 + N_2$ en fonction de m_T, g et α.

5. En appliquant le théorème du moment cinétique à l'ensemble $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ au point C_3 (on admettra qu'il s'écrit comme si C_3 était fixe), établir une seconde relation liant N_1 et N_2.

6. D'après les résultats obtenus, exprimer N_1, N_2, en fonction de h, ℓ, α, m_T et g.

7. Quelle est la condition portant sur h nécessaire pour assurer le contact des roues sur le câble ? Application numérique (en degrés).

On considère maintenant un mouvement uniformément accéléré ($\dot{v} =$ constante). Dans cette situation, $\mathcal{S}_4$ occupe une position repérée par l'angle $\beta = (\widehat{-\vec{e}_y; \overrightarrow{C_3C_4}})$ (cf figure ci-dessous). Il est soumis à la force $\overrightarrow{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ de la part de $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ au point d'application C_3. Pour les applications numériques, on prendra $\frac{\dot{v}}{g} = -0,1$.

8. Quel est le signe de $\dot{v}$ dans la situation représentée sur la figure ? On répondre directement sans calcul.

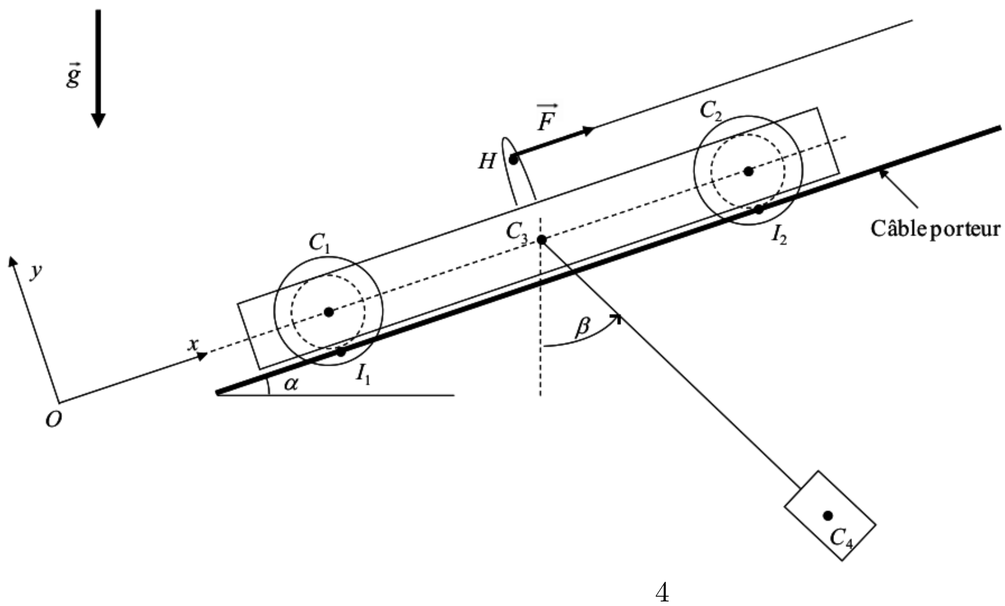
9. Déterminer T et N en fonction de M, g, α et $\dot{v}$.

10. En appliquant le théorème du moment cinétique à $\mathcal{S}_4$, déterminer l'expression de $\tan(\beta - \alpha)$ en fonction de α et $\frac{\dot{v}}{g}$. Application numérique en degrés.

11. Exprimer F en fonction de m_T, g, α, $\dot{v}$, j et r. Application numérique.

12. Déterminer les expressions de N_1 et N_2. Expliquer qualitativement (sans calcul) comment sera modifiée la condition de décollement d'une roue trouvée pour $\dot{v} = 0$, selon le signe de $\dot{v}$.

13. On considère dans cette question que les conditions sont telles que les roues restent en contact. En modélisant le contact entre les roues et le câble par la loi de Coulomb du frottement solide avec un coefficient de frottement f, montrer que l'une des roues se met forcément à glisser si l'accélération $|\dot{v}|$ est suffisamment grande.
Laquelle des deux glisse en premier lorsqu'on augmente $|\dot{v}|$, selon le signe de $\dot{v}$?
A quelle valeur de $\dot{v}$ cela se produit-il ? Application numérique pour $f = 0,5$.



* Fin de l'épreuve *