

MÉCANIQUE

I. Mouvement d'un satellite terrestre

- $[\mathcal{G}] = \frac{[d^2]}{[m^2]} [F] = L^2M^{-2}MLT^{-2} = [M^{-1}L^3T^{-2}]$. L'unité est le $[kg^{-1}.m^3.s^{-2} = N.m^2.kg^{-2}]$.
- On suppose le référentiel géocentrique \mathcal{R} galiléen, et on projette le principe fondamental sur la base polaire, ce qui conduit pour un mouvement circulaire ($r = \text{constante}$) à

$$(\vec{u}_r) \quad -r\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \tag{1}$$

$$(\vec{u}_\theta) \quad r\ddot{\theta} = 0 \tag{2}$$

On en déduit $\ddot{\theta} = 0$ donc la vitesse (algébrique) $v = r\dot{\theta}$ est constante. Le mouvement est donc **uniforme**.

- La vitesse étant constante, elle est égale à la vitesse moyenne : $v = \frac{2\pi r}{T}$.
- L'Eq. (1) donne par ailleurs $v^2 = \mathcal{G} \frac{M_T}{r}$, donc $\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \mathcal{G} \frac{M_T}{r}$. D'où la troisième loi de Kepler : $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{4\pi^2}$.
- D'après l'Eq. (1), $v_L = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_L}} \simeq 1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La période est obtenue par la loi de Kepler : $T_L = 2\pi \sqrt{\frac{R_L^3}{\mathcal{G}M_T}} \simeq 2,4 \times 10^5 \text{ s} \simeq 3 \times 10^1 \text{ j}$.

- La force gravitationnelle d'attraction par la Terre étant centrale de centre O , le théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} galiléen s'écrit $\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ donc $\vec{\sigma}(O) = \text{constanté}$.
 - En supposant $\vec{\sigma}(O) \neq \vec{0}$, sinon le mouvement est **rectiligne**, à tout instant $\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \text{constanté}$. Donc \overrightarrow{OM} est à tout moment orthogonal à $\vec{\sigma}(O)$, et donc le point M est toujours dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}(O)$ passant par O . Ainsi, **le mouvement est plan**.
 - On pose $\vec{\sigma}(O) = \sigma \vec{u}_z$. Dans le plan du mouvement Oxy on adopte les coordonnées polaires. On obtient $\sigma = mr^2\dot{\theta}$. Or la vitesse aréolaire vaut $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$, donc elle est constante, ce qui constitue la seconde loi de Kepler : **le rayon-vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales**.
 - Comme $C = r^2\dot{\theta} = \text{constante}$, **le sens de rotation est fixé** et ne peut changer au cours du mouvement, et **le mobile ne peut atteindre le centre de force** ($r = 0$) sauf si $C = \dot{\theta} = 0$.

- On calcule le travail élémentaire de la force gravitationnelle et on l'intègre, en tenant compte du fait que $\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$ car \vec{u}_r est de norme constante :

$$\delta W = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} dr = -dE_p \quad \text{avec} \quad E_p = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r},$$

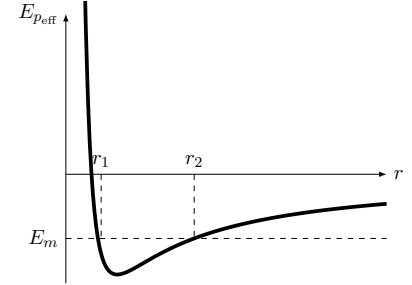
en prenant conventionnellement l'énergie nulle à l'infini. La force est donc **conservative**.

- Le satellite est donc un système conservatif, son énergie mécanique se conserve au cours du temps. Par ailleurs le moment cinétique $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ est aussi conservé. En utilisant ces deux relations on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r) = \text{cte} \quad \text{avec} \quad E_{p\text{eff}}(r) = \frac{\sigma^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

une *énergie potentielle effective*, dont l'allure est représentée ci-dessous.

Du point de vue de la variable r , le système est analogue à un système à un degré de liberté r ayant pour énergie potentielle $E_{p\text{eff}}(r)$. L'équation ci-dessous implique $E_m = \text{cte} \geq E_{p\text{eff}}(r)$. Si $E_m \geq 0$ alors le mouvement n'est pas borné car $r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. Un tel état, **de diffusion**, ne correspond pas au mouvement d'un satellite qui doit être dans un **état lié** : $E_m < 0$ donc le mouvement est borné entre des distances r_1 et r_2 vérifiant $E_m = E_{p\text{eff}}(r_{1,2})$. Ainsi, **le satellite a un mouvement plan inscrit entre deux cercles de centre O et de rayons r_1 et r_2** .



- $E_m = E_{p\text{eff}}(r_{1,2}) \Leftrightarrow E_m r^2 + Kr - \frac{\sigma^2}{2m} = 0$ en posant $K = \mathcal{G}M_T m$. Les solutions s'écrivent

$$r_{1,2} = -\frac{K}{2E_m} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2 E_m}{mK^2}} \right).$$

- Si le mouvement est circulaire de rayon r_0 , alors $r_0 = r_1 = r_2$, ce qui implique d'une part (annulation du discriminant)

$$\frac{\sigma^2}{2m} + \frac{K^2}{4E_m} = 0 \Leftrightarrow E_m = -\frac{mK^2}{2\sigma^2}$$

mais aussi

$$r_0 = -\frac{K}{2E_m} \Leftrightarrow E_m = -\frac{K}{2r_0}.$$

Or dans ce cas on a aussi $\sigma = mr_0 v_0$ où v_0 est la vitesse algébrique (orthoradiale et constante). Finalement ceci conduit à

$$E_m = -\frac{K^2}{2mr_0^2 v_0^2} = -\frac{K}{2r_0} \Leftrightarrow r_0 = \frac{K}{mv_0^2} \quad \text{ou} \quad r_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2},$$

qui est la relation obtenue au 5.

Remarque : on peut retrouver cette relation en cherchant le minimum r_0 de $E_{p\text{eff}}(r)$, puisque le mouvement circulaire correspond au fond du puits de potentiel.

II. Sismographe de Lacoste

1. Le triangle OAB est isocèle en O , de côté $OA = OB = a$ et d'angle au sommet $\theta_B - \theta$. Donc sa base vaut

$$AB = \ell = 2a \sin\left(\frac{\theta_B - \theta}{2}\right).$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat en utilisant l'angle inscrit $\frac{\theta_B - \theta}{2}$ associé à l'angle au centre $\theta_B - \theta$.

On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore généralisé et obtenir $\ell = a\sqrt{2(1 - \cos(\theta_B - \theta))}$, qui conduit au même résultat à l'aide de la formule trigo de l'angle moitié.

2. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur sont concentrées au point M de masse m , dont le mouvement est circulaire de rayon b . Sa vitesse est $b\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ dans la base polaire, donc $E_c = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$. Sa hauteur est $y = b\sin\theta$ donc $E_{p_{\text{pes}}} = mgb\sin\theta$. Enfin il faut considérer l'énergie potentielle élastique liée à l'existence du ressort, de longueur à vide nulle : $E_{p_{\text{el}}} = \frac{1}{2}k\ell^2 = 2ka^2\sin^2\left(\frac{\theta_B - \theta}{2}\right)$. Ceci conduit à

$$E_m = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta) \quad \text{avec} \quad E_p(\theta) = mgb\sin\theta + 2ka^2\sin^2\left(\frac{\theta_B - \theta}{2}\right).$$

3. La position d'équilibre vérifie nécessairement

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta_E) = 0 &\Leftrightarrow mgb\cos\theta_E - 2ka^2\sin\frac{\theta_B - \theta_E}{2}\cos\frac{\theta_B - \theta_E}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow mgb\cos\theta_E = ka^2\sin(\theta_B - \theta_E) \Leftrightarrow \cos\theta_E = \frac{ka^2}{mgb}(\sin\theta_B\cos\theta_E - \sin\theta_E\cos\theta_B) \\ &\Leftrightarrow \tan\theta_E = \frac{\sin\theta_B - \frac{mgb}{ka^2}}{\cos\theta_B} \Leftrightarrow \theta_E = \arctan\left(\frac{\sin\theta_B - \frac{mgb}{ka^2}}{\cos\theta_B}\right), \end{aligned}$$

puisque $\theta_E \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Cet angle est nul à la condition $\theta_E = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_B = \frac{mgb}{ka^2}$.

4. a) Le référentiel du laboratoire étant considéré galiléen, le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= -h\dot{v}^2 = -hb^2\dot{\theta}^2 \\ &= \dot{\theta} \cdot \left[mb^2\ddot{\theta} + \frac{dE_p}{d\theta} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow mb^2\ddot{\theta} = -hb^2\dot{\theta} - \frac{dE_p}{d\theta} \Leftrightarrow mb^2\ddot{\theta} = -hb^2\dot{\theta} - mgb\cos\theta + ka^2\sin(\theta_B - \theta).$$

- b) Pour les petits mouvements autour de $\theta_E = 0$, on développe au premier ordre non nul

$$-\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) \approx -\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_E) - \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_E)(\theta - \theta_E) = 0 - \kappa(\theta - \theta_E) \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_E)$$

Le calcul donne, avec $\theta_E = 0$,

$$\kappa = -mgb\sin\theta_E + ka^2\cos(\theta_E - \theta_B) = ka^2\cos\theta_B = ka^2\sqrt{1 - \sin^2\theta_B} \quad \text{d'où} \quad \kappa = \sqrt{k^2a^4 - m^2g^2b^2}$$

en utilisant la condition obtenue en 3.. L'équation du mouvement sans forçage est alors

$$mb^2\ddot{\theta} \approx -hb^2\dot{\theta} - \kappa\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta \approx 0$$

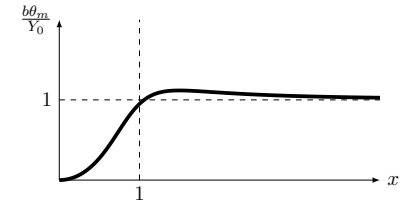
$$\text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{mb^2}} = \left[\frac{k^2a^4}{m^2b^4} - \frac{g^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{4}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{k}{m}\cos\theta_B} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{h}.$$

Les paramètres ω_0 et Q sont caractéristiques du système donc ne changent pas en présence d'un forçage extérieur.

5. L'équation étant linéaire à coefficients constants, on peut passer en complexes en notant que $\theta = \Re\left(\theta_m e^{i(\omega t - \varphi)}\right)$.

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}i\omega + \omega_0^2\right)\theta_m e^{i(\omega t - \varphi)} = \omega^2 \frac{Y_0}{b} e^{i\omega t} \Rightarrow \theta_m = \frac{x^2 Y_0 / b}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

6. On obtient le graphe ci-dessous, qui comporte une faible résonance au-delà de $x = 1$.



Il s'agit d'un **filtrage passe-haut**.

Les oscillations du sol seront bien reproduites lorsque $\theta_m \approx \frac{Y_0}{b}$ donc typiquement pour $x \gtrsim 2 \Leftrightarrow \omega \gtrsim 2\omega_0$.

7. On a ici $\omega_0^2 = \frac{ka^2}{mb^2}\cos\theta_B < \frac{ka^2}{mb^2}$ valeur qu'on obtiendrait pour $\theta_B = 0$, c'est-à-dire pour un sismographe assimilable à une simple masse au bout d'une ressort. A condition que $a \approx b$, la valeur non nulle de θ_B permet donc de réduire la pulsation propre ω_0 , et donc d'abaisser la limite des pulsations mesurables, donnant accès à des mouvements plus lents.

III. Étude d'un accéléromètre pendulaire (d'après X-ENS MP 2014)

1. Considérons le mouvement d'un bras de longueur $\ell = 50$ cm qui effectue un demi-tour « rapide » en une durée $\tau = 0,25$ s. Il lui correspond une vitesse moyenne $v_{moy} = \frac{\ell}{\tau} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Si l'on considère qu'en fin de

parcours, le bras est freiné de v_{moy} à 0 en $\tau' = 0,1$ s, l'accélération finale est $a_{rapide} = \frac{\ell}{\tau\tau'} \simeq 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2g$.

Si l'on multiplie par 10 les durées pour décrire un mouvement lent, on obtient $a_{lent} \simeq 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,02g$. On se situe donc dans les intervalles précisés par la fiche constructeur.

Remarques : le mouvement consistant à laisser tomber son bras tenant la manette en chute libre correspond à une accélération de $1g$. Partant de là, il est raisonnable de considérer que l'on peut obtenir des accélérations légèrement supérieures avec un effort, ou moins fortes en retenant son mouvement.

Les mesures effectuées sur des volleyeurs montrent que leur bras peuvent atteindre une accélération de l'ordre de $20g$ lors de la frappe du ballon !

2. Notons x la position de l'extrémité gauche du ressort, solidaire du boîtier, et ℓ_0 la longueur à vide du ressort (correspondant à la position $X = 0$). Dans \mathcal{R} l'abscisse de la masse d'épreuve s'écrit $x + \ell_0 + X$, donc son accélération vaut $^1 (\ddot{x} + \ddot{X}) \vec{e}_x = (a + \ddot{X}) \vec{e}_x$. Ainsi, l'équation du mouvement de la masse m dans ce référentiel est donnée par :

$$m(a(t) + \ddot{X}) \vec{e}_x = -kX \vec{e}_x - 2m\gamma \dot{X} \vec{e}_x + m\vec{g} + \vec{N}$$

(où la dernière force est la réaction du support (qui est normale). Après projection selon \vec{e}_x et simplification, on obtient :

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t).$$

3. Dans tous les cas, la solution particulière est $X_p = -\frac{a}{\omega_r^2}$. Le discriminant réduit de l'équation caractéristique associée à l'équation est $\delta = \gamma^2 - \omega_r^2$.

1^{er} cas - amortissement faible : $\gamma < \omega_r \Rightarrow \delta < 0$. Les solutions s'écrivent :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + \exp(-\gamma t) \left(A \cos(\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} \cdot t) + B \sin(\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} \cdot t) \right).$$

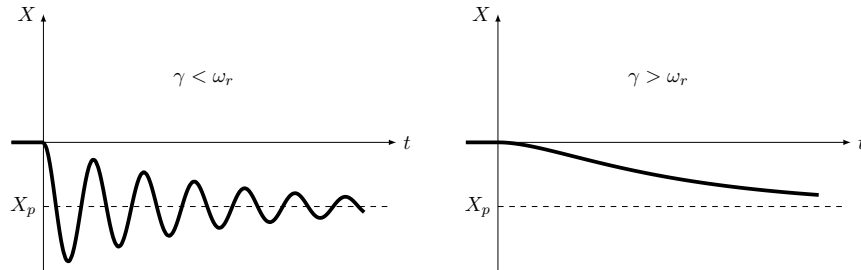
A et B sont les constantes d'intégration.

2^e cas - amortissement fort : $\gamma > \omega_r \Rightarrow \delta > 0$.

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + A \exp\left(\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}\right) t\right) + B \exp\left(\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}\right) t\right).$$

4. Comme $\gamma > 0$, et $\sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} < \gamma$ dans le second cas, dans tous les cas $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2}$.

5. Les courbes débutent en $X(0) = 0$ avec $\dot{X}(0) = 0$ (X et \dot{X} sont continues) :



1. En toute rigueur, ce résultat est valable car les deux référentiels considérés sont en translation l'un par rapport à l'autre, auquel cas la dérivation par rapport à l'un est assimilable à la dérivation par rapport à l'autre (les bases restent identiques et fixes). cf programme de SPE.

6. 1^{er} cas : oscillateur faiblement amorti. Le temps de réponse est $\tau = \frac{1}{\gamma}$.

2^e cas : oscillateur fortement amorti. Il y a *a priori* deux constantes, car il y a deux exponentielles décroissantes. Il faut considérer le temps de réponse le plus grand, puisque c'est celui qui décrira l'amortissement le plus lent.

Ainsi, $\tau = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}}$.

7. On sépare les deux cas, qui se rejoignent pour $\gamma = \omega_r$:



8. Le temps de réponse minimal est celui correspondant au régime critique $\gamma = \omega_r$. Il vaut $\tau = \frac{1}{\omega_r}$.

9. On se trouve dans le cas pseudo-périodique, d'où $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2Q}{\omega_r} \simeq 1 \times 10^{-4}$ s. Le déplacement stationnaire est, en valeur absolue, $X_p = \frac{a}{\omega_r^2} \simeq 1 \times 10^{-8}$ m.

10. Le temps de réponse et la sensibilité, caractérisée par X_p , sont tous deux des fonctions décroissantes de la pulsation ω_r . Ainsi, un temps de réponse court est incompatible avec une grande sensibilité. Cette propriété est indépendante du coefficient d'amortissement, mais peut être aggravée par le choix d'un régime transitoire non critique (donc plus long).

11. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit maintenant

$$m(\ddot{a} + \ddot{X} \vec{e}_x) = -kX \vec{e}_x - 2m\gamma \dot{X} \vec{e}_x + m\vec{g} + \vec{N}$$

d'où après projection selon \vec{e}_x ,

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = (\vec{g} - \ddot{a}) \cdot \vec{e}_x$$

Ainsi, le dispositif mesure la composante de la différence entre la pesanteur \vec{g} et l'accélération \ddot{a} du boîtier sur \vec{u} , soit $(\vec{g} - \ddot{a}) \cdot \vec{u}$. On retrouve bien le résultat précédent en prenant $\vec{u} = \vec{e}_x$ et $\ddot{a} = a(t)\vec{u}$ puisque $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

IV. Courbes approche-retrait en microscopie à force atomique (d'après X-ESPCI PC 2009)

IV.1. Mouvement de la sonde loin de la surface

1. On applique le principe fondamental dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, et on projette selon l'axe du mouvement Oz :

$$m\ddot{z} = -k(z - d) - \lambda\dot{z} + F_0 \cos(\omega t)$$

2.

$$[\omega_0^2] = \frac{[k]}{[m]} = \frac{[kx]}{[mx]} = \frac{MLT^{-2}}{ML} = T^{-2} \quad \text{donc} \quad [Q] = \frac{[m][\omega_0^2][v]}{[\lambda v]} = \frac{MT^{-1}LT^{-1}}{MLT^{-2}} = 1 \quad \text{soit} \quad [Q] = 1.$$

$$[a_m] = \frac{[F_0]}{[k]} = \frac{[F_0][x]}{[kx]} = [x] \quad \text{donc} \quad [a_m] = L.$$

$$[u] = \frac{[\omega]}{[\omega_0]} \quad \text{donc} \quad [u] = 1.$$

3. Ré-écrivons l'équation du mouvement sous forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 (z - d) = \omega_0^2 a_m \cos(\omega t).$$

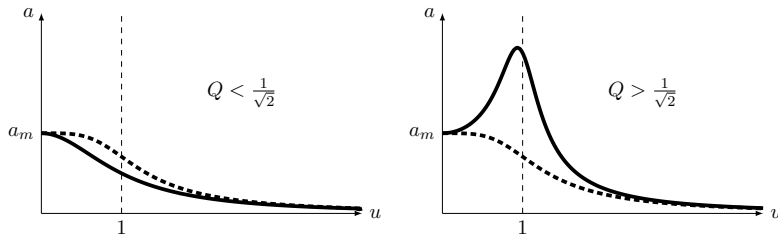
Posons $Z = z - d = a \cos(\omega t + \varphi)$ pour éliminer la solution particulière correspondant à la position d'équilibre. On a $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$, donc

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 a_m \cos(\omega t).$$

On passe en notation complexe dans l'équation du mouvement en posant $Z = z - d = \Re(Z)$ avec $\underline{Z} = a e^{i(\omega t + \varphi)}$:

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2\right) a e^{i(\omega t + \varphi)} = \omega_0^2 a_m e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad a e^{i\varphi} = \frac{a_m}{1 - u^2 + i \frac{u}{Q}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{a_m}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

La courbe $a(u)$ admet **une résonance** en $u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, avec pour amplitude maximale $u_{\max} = \frac{Q a_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$. Ainsi, la résonance est **d'autant plus intense que Q est grand**. On trace en pointillés la courbe intermédiaire pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



4. $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 1 \times 10^5 \text{ Hz.}$

IV.2. Réponse près de la surface

5. Lorsqu'on ne prend en compte que les 2 premiers termes de $F(z)$, l'équation du mouvement se trouve modifiée comme suit :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + (\omega_0^2 - \frac{B}{m}) Z = \frac{A}{m} + \omega_0^2 a_m \cos(\omega t).$$

6. Le terme constant A modifie la solution particulière en l'absence de forçage c'est-à-dire la position moyenne, qui devient $Z_{\text{eq}} = \frac{A/m}{\omega_0^2 - B/m}$. Ceci conduit à

$$Z_{\text{eq}} = -\frac{K/d^2}{k - 2K/d^3} \approx -\frac{K}{kd^2} \simeq -1 \times 10^{-4} \text{ nm.}$$

L'écart relatif par rapport à $z_{\text{eq}} = d$ est donc de l'ordre de 10^{-5} soit 0,001 %.

7. Le terme linéaire de $F(z)$ correspond à une force élastique supplémentaire. Il modifie donc la pulsation propre qui devient $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{B}{m}}$. L'écart relatif (très faible) est

$$\frac{\omega'_0 - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\omega_0^2 - \omega_0^2 - \frac{B}{m}}{2\omega_0^2} = -\frac{B}{2m\omega_0^2} = -\frac{K}{kd^3} \simeq 8 \times 10^{-6} = 0,0008\%.$$

Remarque : on obtient le même résultat directement par un développement limité de ω'_0 .

8. $CZ^2 = Ca^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{Ca^2}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi))$.
 $DZ^3 = Da^3 \cos^3(\omega t + \varphi) = \frac{Da^3}{4} (3 \cos(\omega t + \varphi) + \cos(3\omega t + 3\varphi))$.
 On voit donc apparaître les pulsations **double** 2ω et **triple** 3ω .