

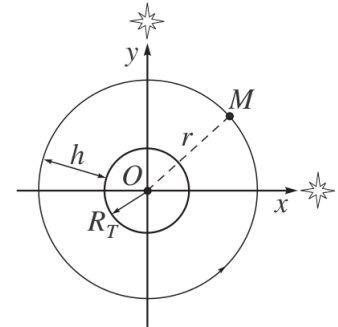
# MÉCANIQUE

## CALCULATRICES INTERDITES

On effectuera toutes les applications numériques à la main avec un seul chiffre significatif.

### I. Mouvement d'un satellite terrestre

On considère un satellite de masse  $m$  en orbite circulaire de rayon  $r = R_T + z$  autour de la Terre dans le référentiel géocentrique. On note  $z$  l'altitude du satellite par rapport à la surface, et  $O$  le centre de la Terre, qui est placé au centre du repère.



Données :

- constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$  uSI.
- masse de la Terre :  $M_T = 6 \times 10^{24}$  kg.
- rayon terrestre :  $R_T = 6400$  km.

1. Donner la dimension de  $\mathcal{G}$  puis son unité dans le Système International.
2. Montrer que le mouvement circulaire est uniforme.
3. Etablir la relation entre la vitesse  $v$  du satellite, sa période de révolution  $T$  et le rayon  $r$  de l'orbite.
4. En déduire la troisième loi de Képler.
5. Le centre de la Lune a un mouvement approximativement circulaire uniforme, autour de la Terre, à une distance  $R_L \approx 384400$  km. Exprimer puis calculer sa vitesse  $v_L$  (en  $\text{km.s}^{-1}$ ) et sa période de révolution  $T_L$  (en jour).

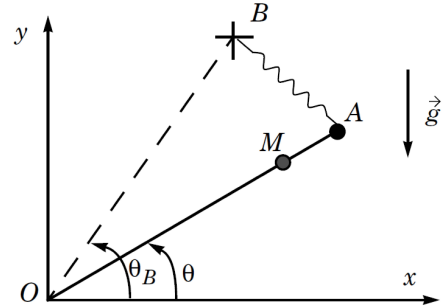
On s'intéresse maintenant aux mouvements plus généraux du satellite, c'est-à-dire non forcément circulaires.

6. Démontrer que le moment cinétique en  $O$  du satellite,  $\vec{\sigma}(O)$  est conservé. Quelles sont les conséquences pour le mouvement ? Justifier soigneusement.  
Dans la suite, on notera  $\sigma$  la valeur algébrique de  $\vec{\sigma}(O)$ .
7. Montrer que la force d'attraction gravitationnelle est conservative. Retrouver l'expression de son énergie potentielle  $E_p$ .
8. A l'aide d'une approche énergétique, montrer que le mouvement est nécessairement inscrit entre deux cercles coplanaires et de centre  $O$ .
9. Calculer les rayons  $r_1$  et  $r_2$  de ces cercles en fonction notamment de  $\sigma$  et de l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite.
10. Retrouver alors l'expression du rayon  $r_0$  du mouvement lorsque celui-ci est circulaire.

## II. Sismographe de Lacoste

Pour enregistrer fidèlement des secousses de période importante (de l'ordre de quelques dizaines de secondes), on utilise un modèle de sismographe dit de Lacoste, dont la suspension est schématisée ci-dessous.

Sur une tige de longueur  $OA = a$  et de **masse négligeable**, est soudé un point matériel de masse  $m$  à une distance  $OM = b$  ( $b < a$ ). Cette tige peut osciller sans frottement autour de l'axe  $Oz$  horizontal. On note  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  les vecteurs unitaires associés aux axes cartésiens  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . La position de la tige est repérée par l'angle  $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OA})$ . Un ressort relie l'extrémité  $A$  et la tige à un point  $B$  fixe dont la position est définie par la longueur  $OB = a$  et l'angle constant  $\theta_B = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OB})$ . Ce ressort, de longueur à vide négligeable, exerce sur la tige en  $A$  une force  $\vec{F}$  proportionnelle à sa longueur soit  $\vec{F} = k\overrightarrow{AB}$ ,  $k$  désignant une constante positive. Enfin, l'air ambiant exerce sur la masse en  $M$  une force de frottement fluide  $\vec{\Gamma} = -h\vec{v}$ , où  $h$  est une constante positive.



La norme du champ de pesanteur vaut  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ . On travaille dans le référentiel terrestre, considéré galiléen.

1. Exprimer la longueur du ressort  $\ell = AB$  en fonction de  $\theta$  et  $\theta_B$ . On n'oubliera pas que les points  $A$  et  $B$  sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ .
2. Exprimer l'énergie mécanique du système { tige  $OA$ , masse  $M$  }, qui sera assimilé au point matériel  $M$  de masse  $m$ , en fonction de  $\theta$  et des paramètres du problème. Dans la suite on notera  $E_p(\theta)$  l'énergie potentielle totale.
3. Etablir l'expression de la position d'équilibre  $\theta_E$ .  
On souhaite que  $\theta_E$  soit nul. Quelles conditions doivent vérifier les différents paramètres pour qu'il en soit ainsi ?  
*On supposera cette condition vérifiée dans toute la suite.*
4. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, établir l'équation du mouvement de  $M$  vérifiée par  $\theta$ .

Le dispositif est maintenant soumis à une secousse sismique au cours de laquelle le mouvement vertical du sol est décrit par une vibration de la forme  $y_s(t) = Y_0 \cos(\omega t)$ . L'équation différentielle associée aux petits mouvement de la masse  $m$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \omega^2 \frac{Y_0}{b} \cos(\omega t)$$

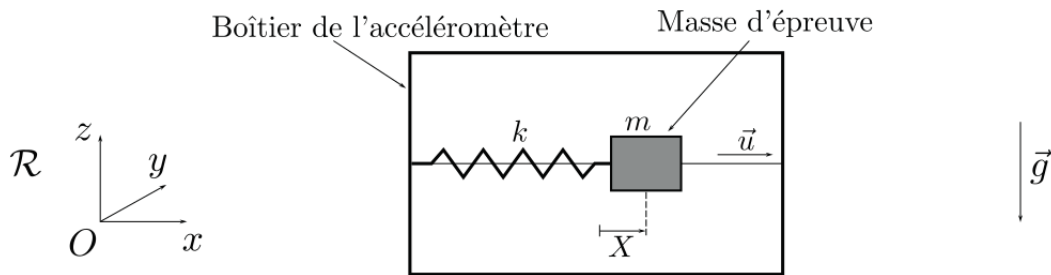
5. Donner l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ .
6. On suppose que  $\theta$  reste petit et, en régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme  $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t - \varphi)$ . Exprimer l'amplitude  $\theta_m$  des oscillations en fonction de  $x = \omega/\omega_0$ .
7. Le sismographe est légèrement résonant pour la pulsation  $\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ . Tracer l'allure de  $b\theta_m/Y_0$  en fonction de  $x$ . Quel type de filtrage mécanique est réalisé par ce dispositif ?  
Pour quelles pulsations  $\omega$  de la secousse le mouvement de la masse  $m$  reproduira-t-il celui du sol ?
8. Expliquer en quoi le sismographe de Lacoste permet de détecter des périodes d'oscillations particulièrement lentes, par rapport à une simple masse  $m$  au bout d'un ressort de raideur  $k$ .

### III. Étude d'un accéléromètre pendulaire

Dans le problème  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur que l'on prendra égale à  $10 \text{ m.s}^{-1}$ . L'accéléromètre ADLX qui équipe les manettes des consoles Nintendo WiiU<sup>TM</sup> est un accéléromètre de type pendulaire. La fiche constructeur précise qu'il peut mesurer des accélérations comprises entre  $-5g$  et  $+5g$ , que la plus petite accélération mesurable est de  $0,01g$ , et qu'il peut résister à des chocs allant jusqu'à  $10000g$ .

1. Donner, en précisant la méthode utilisée, les ordres de grandeur des accélérations subies par la manette de jeu placée dans la main d'un joueur agitant rapidement ou lentement le bras. Les situer relativement aux valeurs annoncées par le constructeur.

Un accéléromètre pendulaire peut être assimilé à un système masse-ressort amorti, dont le schéma de principe est présenté sur la figure 1. L'accéléromètre se compose d'une masse d'épreuve  $m$ , astreinte à se déplacer selon un axe  $\vec{u}$  solide du boîtier extérieur de l'accéléromètre. La masse d'épreuve est reliée au boîtier par un ressort de raideur  $k$ . On note  $X$  la position de la masse d'épreuve par rapport au centre du boîtier. La position au repos de la masse d'épreuve, lorsque l'axe  $\vec{u}$  est horizontal, est  $X = 0$ . On suppose que la masse d'épreuve subit également une force de frottement visqueux  $F = -2m\gamma\dot{X}\vec{u}$  où  $\gamma$  est une constante positive.



Le boîtier se déplace dans un référentiel  $\mathcal{R}$  supposé Galiléen et on note  $\vec{a}$  son accélération dans ce référentiel. Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse d'épreuve quitte sa position d'équilibre. La mesure de la position  $X$  permet alors de déduire l'accélération du boîtier.

On suppose tout d'abord que l'accéléromètre garde une orientation fixe et horizontale selon l'axe  $Ox$  ( $\vec{u} = \vec{e}_x$ ). De plus, l'accéléromètre ne se déplace que selon l'axe  $Ox$  ( $\vec{a} = a(t)\vec{e}_x$ ). On note  $\omega_r = \sqrt{k/m}$ .

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la variable  $X$  dans  $\mathcal{R}$ , faisant intervenir  $\omega_r$ ,  $\gamma$  et  $a(t)$ .

On suppose que l'accéléromètre ainsi que sa masse d'épreuve sont immobiles pour des temps  $t$  négatifs, et que l'accéléromètre subit une accélération constante  $\vec{a} = a\vec{e}_x$  pour les temps  $t$  positifs.

3. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle dans le cas faiblement amorti où  $\gamma < \omega_r$  et dans le cas fortement amorti où  $\gamma > \omega_r$ . On ne cherchera pas à calculer les deux constantes d'intégration qui apparaissent dans les expressions.
4. Montrer que dans les deux cas, faiblement et fortement amorti,  $X(t)$  tend vers une valeur stationnaire dont on donnera l'expression.
5. Tracer l'allure de  $X(t)$  dans les deux cas, faiblement et fortement amortis.

On appelle *temps de réponse* de l'accéléromètre le temps caractéristique pour que  $X(t)$  atteigne le régime stationnaire.

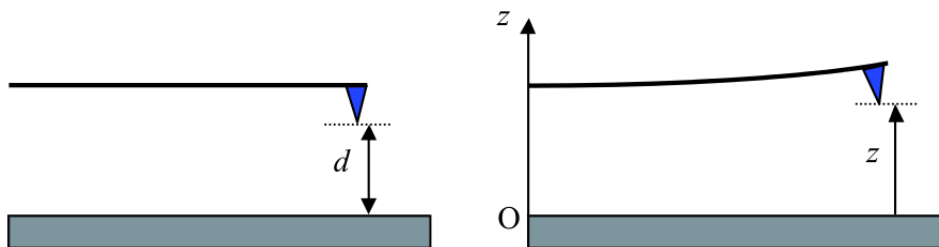
6. Donner le temps de réponse de l'accéléromètre dans les deux cas, faiblement et fortement amorti.
7. Tracer l'allure du temps de réponse de l'accéléromètre en fonction du paramètre  $\gamma$ , pour une pulsation  $\omega_r$  fixée.
8. D'après le graphe de la question précédente, quel est le temps de réponse minimal pour un accéléromètre de pulsation  $\omega_r$  donnée ?

D'après la fiche constructeur, l'accéléromètre ADLX possède les caractéristiques suivantes : pulsation de résonance  $\omega_r = 2\pi \times 5500 \text{ rad.s}^{-1}$ , facteur de qualité  $Q = \omega_r/(2\gamma) = 2,5$ .

9. Donner la valeur du temps de réponse de l'accéléromètre, ainsi que celle du déplacement stationnaire de la masse d'épreuve pour une accélération de  $1g$ .
10. Pourquoi peut-on dire que les performances de ce type d'accéléromètre résultent d'un compromis entre temps de réponse et sensibilité, c'est-à-dire qu'un accéléromètre pendulaire très sensible aura un temps de réponse long ?
11. On considère que l'accéléromètre n'est plus horizontal et qu'il subit une accélération constante  $\vec{a}$  d'orientation quelconque. Montrer que ce type d'accéléromètre n'est pas capable de mesurer la composante de l'accélération  $\vec{a}$  selon  $\vec{u}$  mais une quantité que l'on exprimera en fonction de  $\vec{a}$ ,  $\vec{u}$  et l'accélération de la pesanteur  $g$ .

## IV. Courbes approche-retrait en microscopie à force atomique

Le Microscope à Force Atomique est un palpeur local et ultra-sensible de force. Son principe est le suivant : une pointe fine, métallique ou isolante, se trouve à l'extrémité d'un bras de levier souple qui fait office de ressort. L'autre extrémité de ce bras est fixe. L'extrémité du bras portant la pointe est approchée de la surface, à étudier et interagit avec cette dernière. La force qui s'exerce entre la pointe et la surface provoque, en chaque point, une déflexion du bras, que l'on détermine à partir de la réflexion d'un faisceau laser. Dans le fonctionnement dit en mode résonant, la pointe est excitée par une force périodique de fréquence proche de la fréquence de résonance du système bras-pointe. L'interaction pointe-surface perturbe ce système résonant, ce qui entraîne une variation de l'amplitude de vibration. L'ordre de grandeur de l'amplitude vibratoire peut varier dans de grandes proportions, de quelques dixièmes à quelques dizaines de nanomètres. La mesure de cette amplitude vibratoire lorsque la pointe balaye la surface donne accès à la topographie de la surface étudiée. À l'aide de céramiques piézoélectriques, le déplacement de la sonde au-dessus de la surface s'effectue avec une précision de l'ordre du nanomètre dans les trois directions de l'espace.



À titre d'information, les dimensions caractéristiques d'un levier sont : longueur de 100 à 200  $\mu\text{m}$ , largeur de 20 à 30  $\mu\text{m}$  et épaisseur de 1 à 5  $\mu\text{m}$ . La pointe est conique, d'une hauteur de 5 à 20  $\mu\text{m}$ ; l'angle d'ouverture du cône est de 20 degrés et le rayon de courbure de l'extrémité de l'ordre de 20 nm; l'aire en regard de la surface à étudier est ainsi d'une centaine de  $\text{nm}^2$ .

On suppose que le mouvement de la pointe s'effectue selon la direction verticale. Sa position est repérée par son altitude  $z$  ( $z > 0$ ) à partir de la surface; on note  $d$  la distance séparant la pointe de la surface lorsque la sonde est à l'équilibre *en l'absence de forces externes*.

### IV.1. Mouvement de la sonde loin de la surface

Loin de la surface, la sonde est modélisée par un oscillateur mécanique constitué d'une masse ponctuelle  $m$  soumise :

- à une force de rappel élastique  $-k(z - d)$  avec  $k > 0$ ,
- à un amortissement représenté par une force de frottement visqueux  $-\lambda\dot{z}$ , avec  $\lambda > 0$ ,
- à une force d'excitation selon  $Oz$ , sinusoïdale,  $F_z = F_0 \cos(\omega t)$ .

1. Écrire l'équation du mouvement régissant le mouvement de cet oscillateur.

Dans la suite, on pose  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$ ,  $a_m = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  et  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

2. Déterminer les dimensions de  $Q$ ,  $a_m$  et  $u$ .
3. En régime sinusoïdal permanent, la solution est de la forme  $z(t) = d + a \cos(\omega t + \varphi)$ , avec  $a$  réel positif. Déterminer l'amplitude  $a(\omega)$ ; l'exprimer en fonction de  $a_m$ ,  $Q$  et  $u$ . Comment évolue le graphe de  $a(\omega)$  en fonction de  $Q$ ?
4. Calculer la fréquence propre  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  pour  $m = 5 \times 10^{-11} \text{kg}$  et  $k = 20 \text{N.m}^{-1}$ .

Les valeurs typiques de  $Q$  sont de quelques centaines.

## IV.2. Réponse près de la surface

Lorsque la sonde est rapprochée de la surface, elle est soumise à une force additionnelle verticale. Essentiellement due aux interactions de Van der Waals, elle est attractive et donnée par  $F(z) = -\frac{K}{z^2}$  où  $K$  est une constante positive qui dépend de la taille de la pointe et des matériaux en présence. En effectuant l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude, on adopte pour  $F(z)$  la forme approchée suivante :

$$F(z) = A + B(z - d) + C(z - d)^2 + D(z - d)^3 \quad (1)$$

avec  $A = -\frac{K}{d^2}$ ,  $B = \frac{2K}{d^3}$ ,  $C = -\frac{3K}{d^4}$  et  $D = \frac{4K}{d^5}$ .

On étudie tout d'abord l'effet des deux premiers termes de l'expression (1) et l'on effectue le changement de variable  $Z = z - d$ .

5. Écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de la pointe.
6. Quel est l'effet du terme  $A$  sur les oscillations forcées de la sonde? Calculer l'amplitude de cet effet en fonction de  $K$ ,  $k$  et  $d$ . L'évaluer numériquement pour  $d = 15 \text{nm}$  et  $K = 5 \times 10^{-28} \text{N.m}^2$ .
7. Sur quelle caractéristique de l'oscillateur influe le terme  $B$ ? Évaluer numériquement cet effet avec les données précédentes.
8. Pour des amplitudes d'oscillation plus importantes, les termes non linéaires  $C(z-d)^2$  et  $D(z-d)^3$  de l'expression (1) ne sont plus négligeables. Mais, étant donné les valeurs élevées de  $Q$ , au voisinage de la résonance, l'oscillation forcée reste pratiquement sinusoïdale à la pulsation  $\omega$  de la force excitatrice, soit  $Z(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$ . Montrer que ces termes non linéaires entraînent l'apparition d'harmoniques à des pulsations différentes de  $\omega$ . Préciser ces pulsations.

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*