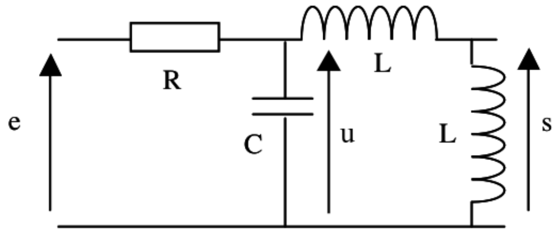
FILTRAGE - MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

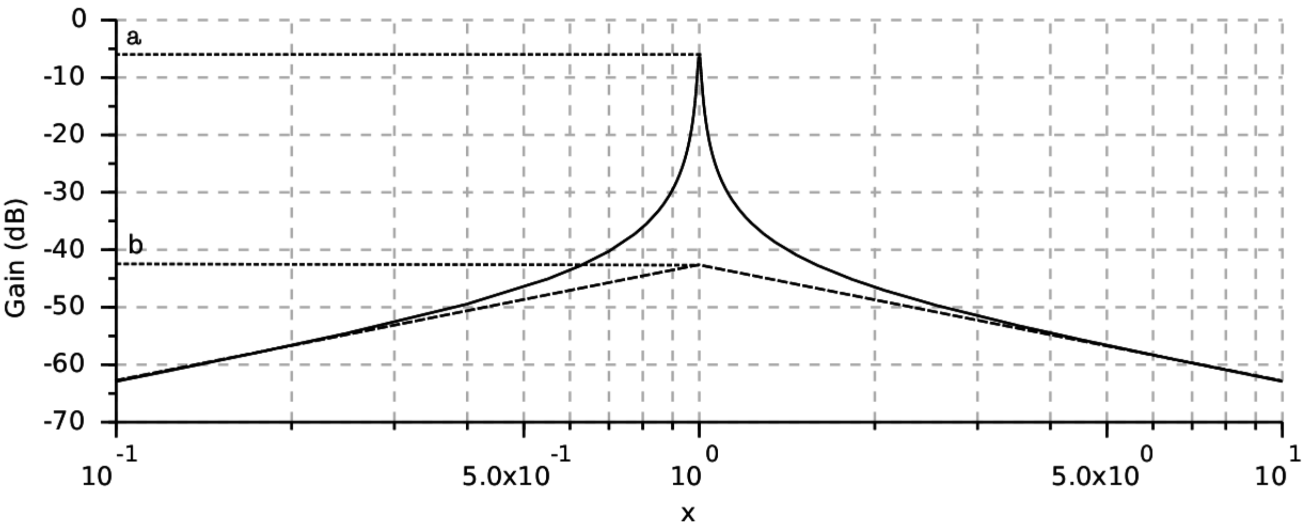
I. Filtre de Hartley



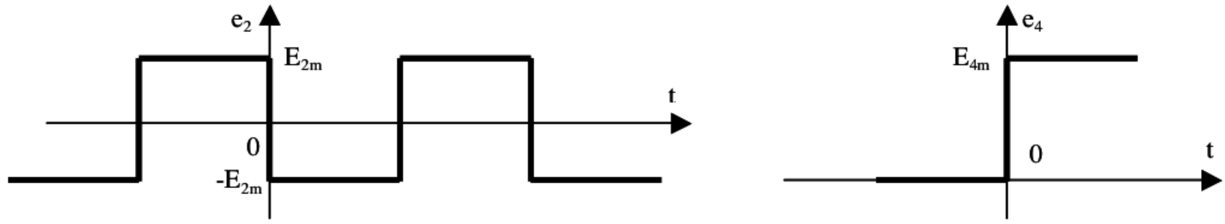
1. On se place en Régime Sinusoïdal Forcé (RSF) de pulsation ω. Etablir une relation entre les tensions $\underline{s}$ et $\underline{u}$ associées à s et u en RSF.
2. Prévoir à l'aide de schémas équivalents BF et HF la nature probable du filtre.
3. Calculer la fonction de transfert en sortie ouverte $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$. On pourra notamment appliquer la loi des noeuds en terme de potentiel en un point bien choisi (on pourra aussi ajouter une masse). Mettre cette fonction de transfert sous la forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

la pulsation réduite. Donner le nom et l'expression des constantes ω_0, Q et H_0 en fonction des grandeurs R, C et L.



4. Le diagramme de Bode en amplitude est donné ci-dessus. Mesurer la pente des asymptotes. Retrouver leur valeur à partir de l'étude de la fonction de transfert.
5. Déterminer graphiquement les valeurs numériques de a et b définis sur le diagramme. En déduire les valeurs de Q et de H_0. Ces valeurs sont-elles cohérentes ?
En déduire la valeur de R sachant que $L = 1,0\,\mathrm{mH}$ et $C = 0,10\,\mu\mathrm{F}$.
6. Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase. Ajouter l'allure de la courbe réelle.
7. Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ou de dérivateur ? Si oui, dans quelle bande de fréquence ? Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage utilisé pour réaliser ces opérations ?
8. On étudie la sortie $s_1(t)$ lorsqu'on applique à l'entrée le signal $e_1(t) = E_0 + E_{1m}\cos(\omega_1 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0$. Déterminer l'expression littérale du signal de sortie $s_1(t)$.



9. On applique maintenant un signal créneau $e_2(t)$, de pulsation $\omega_2 = \frac{\omega_0}{3}$ et d'amplitude $E_{2m} = 1,0\,\mathrm{V}$ (figure ci-dessus). Calculer la valeur efficace E_2 de $e_2(t)$.
10. Le signal $e_2(t)$ est décomposable en série de Fourier :

$$e_2(t) = \frac{4E_{2m}}{\pi}\left[\sin(\omega_2 t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega_2 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_2 t) - \frac{1}{7}\sin(7\omega_2 t) + \dots\right]$$

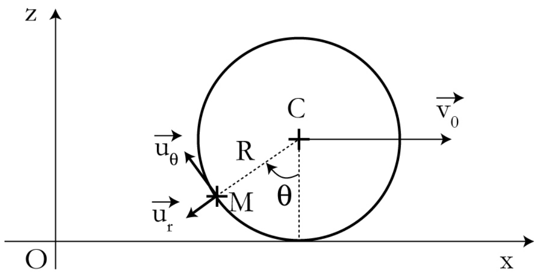
    Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $e_2(t)$.
11. Donner l'expression du gain en fonction de x. Calculer les valeurs numériques des amplitudes des trois premiers pics dans le signal de sortie $s_2(t)$. En déduire l'expression littérale approchée du signal de sortie $s_2(t)$. Justifier alors le nom de « tripleur de fréquence » donné à ce filtre.

On alimente dorénavant le montage avec un échelon $e_4(t)$ de hauteur $E_{4m} = 1,0\,\mathrm{V}$ (figure ci-dessus). La sortie est alors notée $s_4(t)$.

12. En considérant que le condensateur est initialement déchargé, donner la valeur de $s_4(0^+)$.
13. Donner de même la valeur de $\frac{\mathrm{d}s_4}{\mathrm{d}t}(0^+)$.
14. Etablir rapidement l'équation différentielle vérifiée par $s_4(t)$ pour $t > 0$ à partir de l'expression de la fonction de transfert sous forme canonique.
15. A partir de la valeur numérique de Q, prévoir le type de régime du circuit pour la fonction $s_4(t)$. Justifier.
    Donner la forme générale de la solution et la déterminer sous forme littérale en appliquant les conditions initiales. On pourra tirer parti du fait que $Q \gg 1$ pour donner une forme approchée.
    Tracer l'allure du graphe de $s_4(t)$.

II. Mouvement d'un caillou sur un pneu

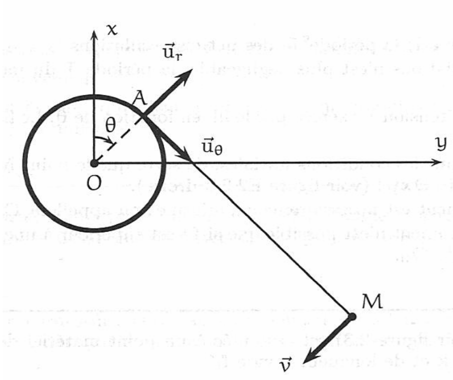
Dans le référentiel terrestre, $\mathcal{R}$, une voiture avance en mouvement rectiligne selon l'axe (Ox), à une vitesse v_0 constante. À l'instant $t = 0$ une roue passe sur un caillou M qui se trouvait au point O, et ce caillou se coince alors dans le pneu. On note C le centre de cette roue et R son rayon extérieur. On pose θ l'angle entre la verticale descendante et $[CM]$, et l'orientation choisie est rétrograde (sens positif horaire). On définit la base polaire $(C, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, avec $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ unitaires, comme indiqué ci-contre.



1. a) La roue roule sans glisser sur la route. De quelle distance dx avance alors la voiture sur le sol lorsque la roue tourne d'un angle $\mathrm{d}\theta$? En déduire $\omega = \dot{\theta}$ en fonction de v_0.
   b) Déterminer l'évolution au cours du temps de l'angle $\theta(t)$.
2. Quelles sont, en fonction de R et θ, les coordonnées cartésiennes x et z du caillou M ?
3. a) Déterminer, en fonction de R, θ et ω, la vitesse et l'accélération de M ?
   b) Donner la vitesse et l'accélération de M au moment où ce point est en contact avec l'axe Ox.
4. Tracer l'allure de la trajectoire de M dans le référentiel terrestre, en indiquant la position des points caractéristiques.
5. Après quelques tours de roue, le caillou se détache soudainement. Part-il vers l'avant ou vers l'arrière ?
6. Quel est le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la voiture ?

III. Enroulement d'un fil

Un fil inextensible peut s'enrouler sur un cylindre d'axe vertical, de centre O et de rayon R, auquel il est fixé (figure ci-contre). A l'extrémité du fil, on dispose un point matériel M de masse m qui glisse sans frottement sur le plan (O_{xy}). On note A le point où le fil s'enroule sur le cylindre, et on utilisera la base cylindro-polaire attachée au mouvement de A (l'axe (O_z) pointe vers l'arrière de la feuille). On suppose enfin que le fil reste toujours tendu.



1. Exprimer, en fonction de θ, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en projection sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On supposera que le fil, de longueur totale l_0, est entièrement déroulé lorsque $\theta = 0$.
2. Montrer que la vitesse doit toujours rester orthogonale au fil, et que sa norme v_0 est constante, égale à la vitesse initiale de M.
3. Exprimer $\theta(t)$ et la norme $T(t)$ de la tension du fil.
4. Le fil casse lorsque la tension devient supérieure à une certaine valeur T_0. Déterminer v_0 pour que le fil casse après exactement un tour.
5. Quelle doit être la valeur minimale de l_0 pour que, après la rupture du fil, le mobile M ne heurte pas le cylindre ?

IV. Point glissant à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère

Soit la sphère creuse $\mathcal{S}$ représentée ci-dessous, de centre C et de rayon R. Les points O et A de $\mathcal{S}$ forment un diamètre vertical OA. La sphère est fixe dans le référentiel terrestre qu'on supposera galiléen. On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m glissant sans frottement à l'intérieur (Fig. 1) ou à l'extérieur (Fig. 2) de la sphère. On repère la position de M par l'angle $\theta = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM})$.

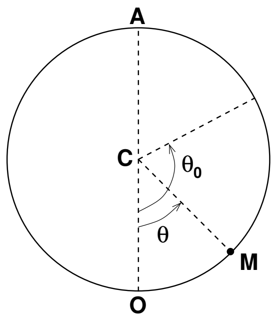


FIGURE 1 – Point mobile à l'intérieur de la sphère.

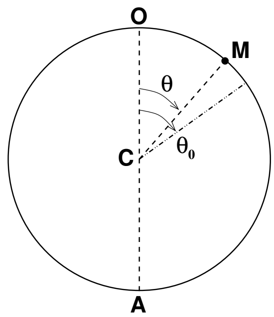


FIGURE 2 – Point mobile à l'extérieur de la sphère.

On se place dans le cas de la Fig. 1.

1. Etablir l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ satisfaite par $\theta(t)$.
2. Caractériser le mouvement dans le cas où M reste proche de O. Donner l'expression de la période T_0.
3. On revient au cas général d'un mouvement d'amplitude non négligeable. La période T est-elle supérieure ou inférieure à T_0 ? Justifier.
4. On pose $\omega = \dot{\theta}$. Montrer que $\ddot{\theta} = \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$.
5. En déduire que l'on peut intégrer l'équation $(\mathcal{E})$ en fonction de la variable θ. Montrer que si en $\theta = 0$ la vitesse angulaire vaut $\omega = 2\,\omega_0$, avec ω_0 la pulsation propre, on obtient alors :
$$\omega^2 = 2\,\omega_0^2(1 + \cos\theta).$$
6. En principe, d'après l'équation précédente le mobile M devrait pouvoir atteindre le point A. Expliquer pourquoi il ne l'atteint en fait pas. Calculer l'angle de décollement θ_0.
7. Décrire qualitativement le type de trajectoire suivi ultérieurement par M.

On se place maintenant dans le cas de la Fig. 2. OA est maintenant une verticale descendante et le mouvement de M s'effectue sur la surface externe de $\mathcal{S}$.

8. Avec les notations de la Fig. 2 établir la nouvelle équation différentielle $(\mathcal{E}')$ satisfaite par θ.
9. A quel résultat mène l'hypothèse des petits mouvements autour de O ? On pourra considérer par exemple qu'on abandonne le mobile sans vitesse initiale avec $\theta = \alpha \ll 1$. Cette hypothèse est-elle pertinente ?
10. En procédant comme à la question 5., intégrer $(\mathcal{E}')$. Donner l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ dans le cas où M part de O avec une vitesse négligeable.
11. En déduire la valeur θ_0' pour laquelle M quitte la sphère.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *