

SIGNAUX

CALCULATRICES AUTORISÉES

Certains passionnés recherchent les conditions météorologiques propices à la formation d'orages afin de photographier des éclairs. Ils disposent de quelques outils dont l'un d'eux est une simple paire de jumelles, que nous étudierons tout d'abord. Dans un second temps, nous nous intéresserons au télémètre dont elle est munie, celui-ci permettant de déterminer la distance séparant l'observateur du point de chute prévisible de l'orage à venir. Enfin, nous examinerons les perturbations que les éclairs peuvent engendrer sur les installations électriques.

Le problème est constitué de trois parties indépendantes. A l'intérieur de chacune, les sous-parties sont elles aussi indépendantes.

Formulaire :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$

I. Etude d'une paire de jumelles

L'examen de la notice d'une paire de jumelles nous permet d'obtenir les informations rassemblées dans le tableau 1, dont certaines seront explicitées plus loin si nécessaire.

Grossissement	$\times 7$	Diamètre objectif	50 mm
Angle de visée	$7,3^\circ$	Champ de vision	127 m à 1000 m
Distance minimale de mise au point	10,6 m	Pupille de sortie	7,14 mm
Dégagement oculaire	12 mm	Longueur	185 mm

Tableau 1 – Extraits de données constructeur relatives à la paire de jumelles

Démontée (voir figure 1a), la paire de jumelles se trouve être constituée d'éléments optiques assez simples : des lentilles convergentes et divergentes ainsi que des prismes dans la zone masquée.

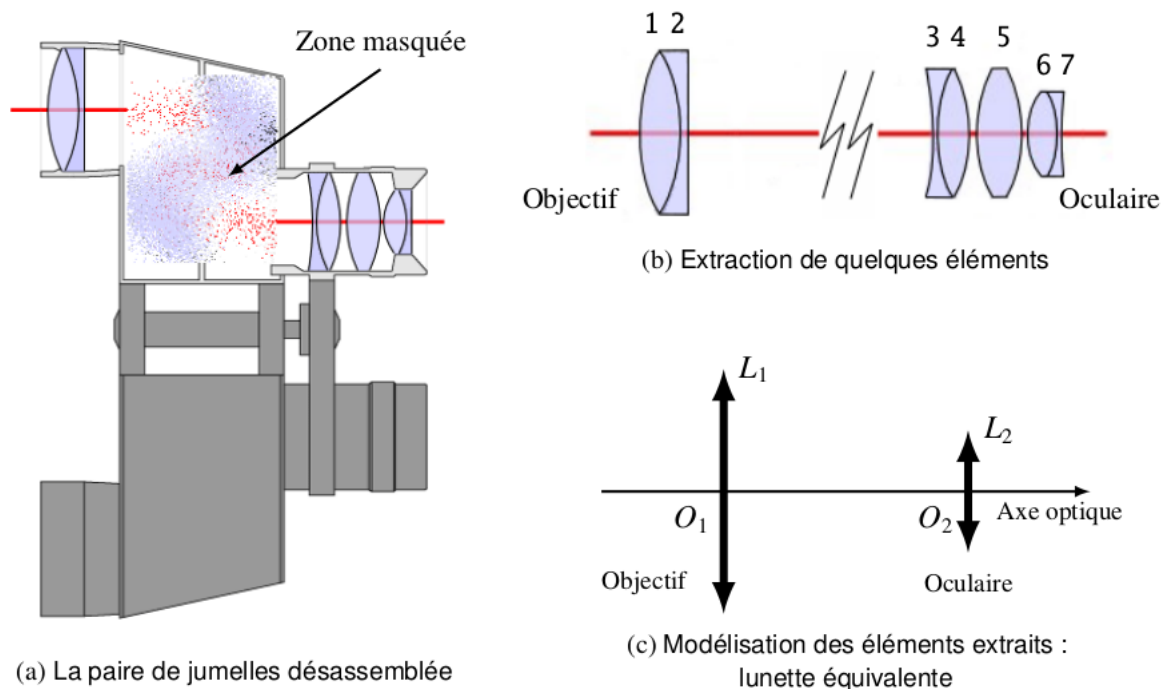


Figure 1 – La paire de jumelles et sa modélisation.

On s'intéresse, en premier lieu, aux groupes de lentilles (extraites de l'ensemble sur la figure 1b) que nous modéliserons, en entrée et en sortie, par des lentilles minces convergentes. La modélisation est présentée en figure 1c. On note f'_1 et O_1 (respectivement f'_2 et O_2) la distance focale image et le centre de l'objectif (respectivement de l'oculaire).

Notre but est de déduire des données constructeur figurant dans le Tableau 1, les ordres de grandeur des caractéristiques optiques de ce système. Dans tout le problème, on suppose que $f'_2 = u$ et $f'_1 = 7f'_2 = 7u$ où u est une longueur de référence à déterminer. Deux modèles seront proposés et permettront de déterminer deux valeurs différentes de u . **On exprimera donc systématiquement les résultats littéraux finaux en fonction de u , et non en fonction de f'_1 et f'_2 .**

I.1. Les éléments du modèle

1. Qu'est-ce qu'une lentille mince ? Identifier, par leur numéro, les lentilles minces divergentes visibles sur la figure 1b. Définir l'objectif et l'oculaire.
2. Proposer une méthode de détermination rapide du caractère convergent ou divergent d'une lentille ne portant aucune indication. La justifier à l'aide d'une représentation graphique.
3. Ces lentilles sont utilisées dans les conditions de l'approximation de Gauss. Quelles sont ces conditions ? Quelles conséquences en découlent si elles sont respectées ?

I.2. Encombrement de la lunette équivalente

4. La lunette équivalente est réglée de manière à constituer un système afocal. Préciser ce que cela signifie. Quel avantage présente ce réglage pour un être humain ?
5. On appelle longueur ou encombrement de la lunette équivalente la grandeur $d_1 = \overline{O_1O_2}$ entre les centres optiques des deux lentilles. En déduire d_1 en fonction de f'_1 et f'_2 . Pour quelle valeur u_1 de u y a-t-il accord avec les données constructeur ?
6.
 - a) Représenter la lunette équivalente afocale en plaçant l'objectif à gauche de l'oculaire. On fera le schéma à l'échelle 1, sur la feuille de papier millimétré fournie en annexe (à rendre avec la copie). On prendra $u = 1$ cm pour simplifier la construction. Tous les foyers doivent être positionnés et visibles, les orientations précisées.
 - b) Sur ce même schéma, dessiner le trajet d'un rayon lumineux arrivant sur l'objectif et incliné d'un angle *orienté* α par rapport l'axe optique. On notera α' l'angle *orienté*, par rapport à l'axe optique, du rayon correspondant émergeant de l'oculaire.
7. À l'aide de cette représentation, établir l'expression *algébrique* du grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$, en fonction de f'_1 et f'_2 . Évaluer numériquement G et commenter son signe.

I.3. Étude du dispositif redresseur à prismes

a. Rôle du dispositif redresseur

On insère un dispositif redresseur, appelé véhicule, entre l'objectif et l'oculaire. Il peut s'agir d'un système de lentilles ou de prismes. Nous allons nous intéresser à un système à prismes, celui inventé par Ignazio Porro à la fin du XIX e siècle.

8. Sur le schéma ci-contre (voir figure 3), un rayon lumineux monochromatique arrive sous incidence normale sur l'hypoténuse du triangle isocèle rectangle, trace du prisme dans son plan de section principal. Toutes les faces de celui-ci sont parfaitement transparentes. L'indice du prisme est supérieur à celui du milieu extérieur.

Tracer qualitativement le parcours du rayon lumineux incident proposé sur la figure 3 s'il est réfracté à la traversée des faces du prisme. Sur le même schéma, représenter le trajet complet de ce rayon lumineux qui, une fois entré dans le prisme, est réfléchi sur les faces du prisme.

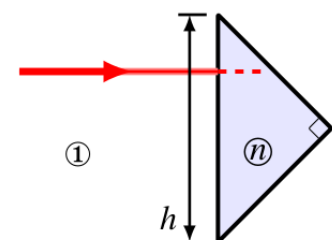


Figure 3 – Trajet d'un rayon lumineux à travers un prisme.

9. Dans le cas de la réflexion totale, démontrer que la distance géométrique parcourue par le rayon lumineux dans le prisme vaut h , longueur de l'hypoténuse.
10. L'indice du gaz dans lequel baigne le prisme est égale à 1,00. Calculer la valeur limite de l'indice n du prisme assurant la réflexion totale dans les conditions d'éclairage de la figure 3.
11. Une paire de jumelles contient, dans chaque tube, deux prismes identiques à celui que nous venons de décrire (voir figure 3). Nous supposons ici que l'agencement des prismes ne sert qu'à réduire l'écartement entre les axes optiques des tubes et celui des yeux. En vous inspirant de la figure 1a, où la zone contenant les prismes a été masquée, proposer un agencement plan des prismes (qui seront accolés) et des lentilles, permettant d'assurer cette réduction d'écartement.

En réalité, la disposition des prismes n'est pas plane ce qui permet de redresser les images dans une paire de jumelles.

b. Calcul du nouvel encombrement

La présence des prismes allonge le chemin effectivement suivi par la lumière. Nous allons déterminer cette *longueur optique* ou *encombrement* et obtenir une nouvelle valeur u_2 de u .

12. On s'intéresse au parcours d'un rayon lumineux monochromatique peu incliné dans une lame de verre à faces parallèles de même indice que le prisme. Le milieu extérieur est assimilé au vide.

Reproduire le schéma de la figure 4 sur votre copie et compléter le parcours du rayon lumineux jusqu'à le faire émerger de la lame de verre. Représenter un second rayon lumineux issu du point source A . En déduire graphiquement la position du point A' , image finale du point A à travers la lame.

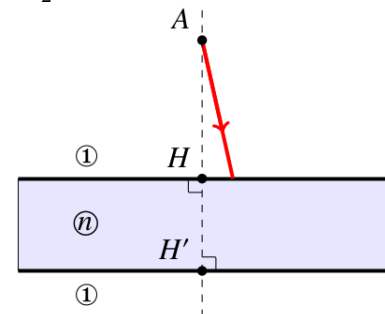


Figure 4 – Trajet d'un rayon lumineux incident.

13. On rappelle que la relation de conjugaison en position du dioptré plan séparant un milieu d'indice 1 d'un milieu d'indice n s'écrit

$$\frac{\overline{HA}}{1} = \frac{\overline{HA_1}}{n}$$

où A_1 est le point image du point objet A à travers le dioptré plan, et H le projeté orthogonal de A sur le dioptré.

Écrire maintenant la relation de conjugaison liant l'image intermédiaire A_1 , l'image finale A' et le point H' dont la position est précisée sur la figure 4. Exprimer la distance $\overline{HH'}$ en fonction de $\overline{AA'}$ et mettre cette relation sous la forme $\overline{HH'} = k_0 \cdot \overline{AA'}$, la constante k_0 ne dépendant que de l'indice n .

14. En présence des deux prismes, la longueur optique vaut $L = 8u_2 + \ell$ où ℓ correspond à la valeur de la grandeur $\overline{AA'}$ de la question précédente obtenue pour une épaisseur de lame de verre égale à $2h$. Exprimer littéralement u_2 en fonction de L , h et n . Sachant que $L = 235$ mm et que les caractéristiques des prismes sont telles que $h = 25,0$ mm et $n = 1,67$, en déduire la valeur numérique u_2 de u , différente de u_1 .

1.4. Pertinence des modèles

15. Les modèles proposés ne convergent pas vers une unique valeur de u . En observant l'association des lentilles (3; 4; 5; 6; 7), identifier la faiblesse de la modélisation utilisée.

II. Utilisation télémétrique de la paire de jumelles

II.1. Télémétrie visuelle

Certaines paires de jumelles sont équipées d'un réticule gradué permettant des mesures de distances longitudinales ou transversales (voir figure 5).

16. En considérant la paire de jumelles comme une simple lunette astronomique réglée de manière afocale, où doit être placé le réticule ?

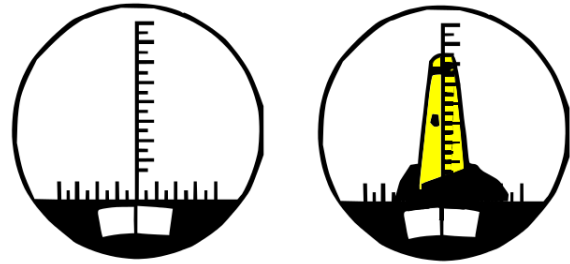


Figure 5 – Le phare d'Eckmühl vu depuis la mer.

17. La notice de la paire de jumelles précise son « champ de vision », qui est de 127 m à 1 000 m. Calculer en degré la largeur angulaire correspondante. Quelle nom la notice donne-t-elle à cette information ? On pourra se référer au Tableau 1.
18. Sur la représentation de la figure 5, le phare d'Eckmühl (Finistère) occupe les deux tiers du champ de vision. Sachant qu'il culmine à 60 m, en déduire la distance qui sépare le bateau du phare.

II.2. Télémétrie automatique

Certaines paires de jumelles sont équipées d'un télémètre. Nous évoquerons ici, pour simplifier, un télémètre à ondes sonores.

Pour réaliser le télémètre, on place un émetteur et un récepteur à ultrason côte à côte. Ce bloc est appelé le *télémètre*. À la distance D , on place un obstacle réfléchissant les ondes sonores, que nous appellerons la *cible*. Une onde sinusoïdale, de période T , est émise par l'émetteur du télémètre. Elle se réfléchit sur la cible et est détectée par le récepteur du télémètre. Sur l'écran d'un oscilloscope, on visualise simultanément deux signaux ; celui capté (par un dispositif non décrit) en sortie de l'émetteur et celui du récepteur.

19. On appelle *temps de vol*, noté t_v , la durée du trajet aller-retour de l'onde entre le télémètre et la cible. Exprimer t_v en fonction de la distance D séparant le télémètre de la cible et de la célérité c de l'onde.
20. Pour illustrer le principe de la mesure, on colle la cible au télémètre, puis on l'éloigne lentement, en comptant le nombre de coïncidences, c'est-à-dire le nombre de fois où les signaux sont en phase. Pour simplifier, on suppose que lorsque $D = 0$, les signaux sont en phase. On se place dans le cas où l'on a compté exactement un nombre n de coïncidences. Exprimer D en fonction de n et de la longueur d'onde λ des ondes ultrasonores.
21. Lors du recul de la cible, 50 coïncidences ont été comptées avant d'observer les signaux suivants sur l'écran de l'oscilloscope (voir figure 6). Dans les conditions de l'expérience, la longueur d'onde des ondes sonores valait 8,5 mm. En exploitant les données de l'enregistrement, calculer la distance séparant le télémètre de la cible.
22. Pourquoi les deux signaux de la figure 6 sont-ils si différents ? Identifier quel est, selon toute vraisemblance, le signal capté en sortie de l'émetteur et celui reçu par le récepteur. Justifier succinctement.
23. Préciser ce que sont les modes AC et DC de l'oscilloscope.
Lors de l'enregistrement présenté sur la figure 6, les deux voies de l'oscilloscope étaient toutes deux réglées sur le même mode. Justifier de quel mode il s'agit.
24. Le comptage des coïncidences a été réalisé en plaçant l'oscilloscope en mode XY. Dans le cas des signaux de la figure 6, représenter la figure que l'on obtiendrait en se plaçant dans ce mode.

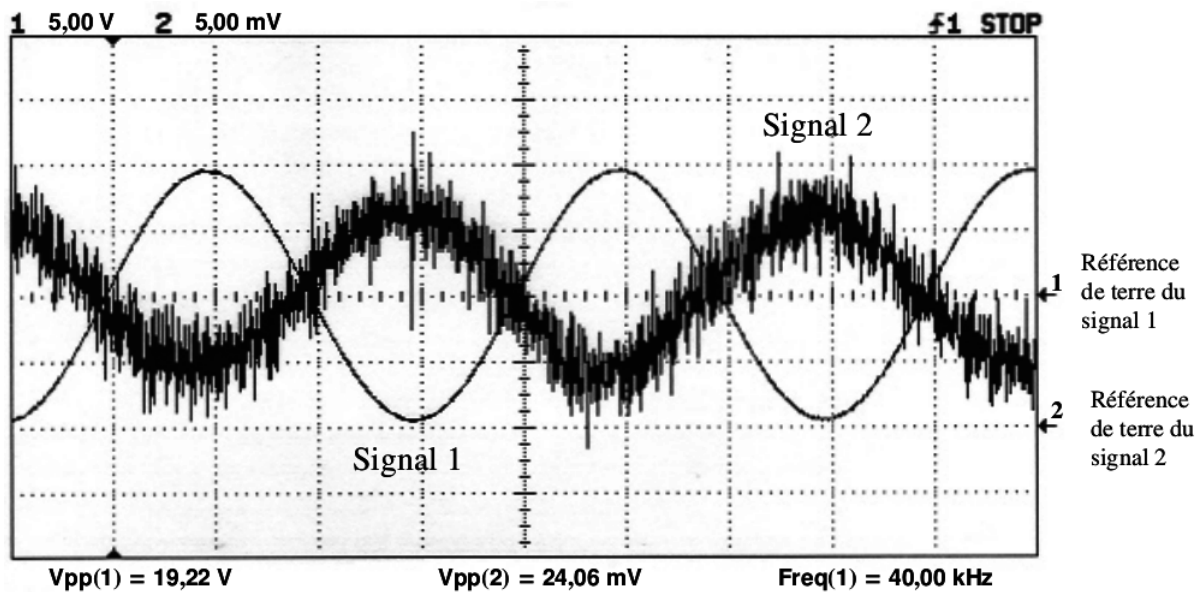


Figure 6 – Signaux électriques issus du télémètre.

Comme nous venons de l'entrevoir, la mesure du déphasage entre l'onde incidente et l'onde réfléchie peut nous renseigner sur la durée de l'aller-retour. Un phasemètre permet d'obtenir cette information.

II.3. Quelques étages d'un phasemètre électronique de principe

a. L'étage principal

L'étage principal d'un phasemètre de principe est constitué d'un multiplieur suivi d'un filtre RC (voir figure 7).

Le signal de tension $v_e(t) = v_0 \cos(\omega_0 t)$ est proportionnel à l'amplitude de l'onde sonore émise.

Celui de tension $v_r(t) = v_1 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est proportionnel à l'amplitude de l'onde sonore reçue après réflexion. Leurs pulsations sont identiques.

On souhaite mesurer le déphasage entre ces deux signaux, ce que l'on va faire au moyen du montage ci-contre.

On note $\underline{v}(t)$ la grandeur complexe associée à la grandeur sinusoïdale $v(t)$.

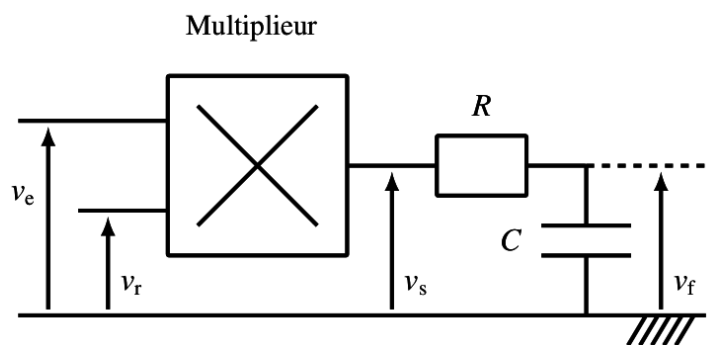


Figure 7 - Un étage du phasemètre.

25. Soit $v_s(t) = kv_e(t)v_r(t)$, la tension en sortie du multiplieur de constante caractéristique k . Préciser l'unité de k , donner l'expression linéarisée de $v_s(t)$ et représenter son spectre fréquentiel (en amplitude).

Calculer la valeur moyenne de la tension $v_s(t)$.

26. Préciser la nature du filtre RC à l'aide d'une étude asymptotique à basse et haute fréquence.

Établir l'expression complexe de sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{v_f}{v_s}$, où ω représente la pulsation des signaux.

27. Établir l'expression de son gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ et représenter la courbe de Bode asymptotique correspondante.

28. Établir une inégalité liant R , C et ω_0 permettant de ne sélectionner qu'une seule composante spectrale du signal $v_s(t)$. Donner, dans ces conditions, l'expression du signal $v_f(t)$. Quelle fonction réalise alors l'étage RC ?

b. Extraction du signal

Du fait de son trajet entre le télémètre et la cible, l'onde récupérée sous forme électrique est perturbée (voir figure 6). On modélise ces perturbations par un signal sinusoïdal de fréquence différente de celle recherchée, noté $v_b(t) = v_2 \cos(\Omega t)$. Sur les entrées du multiplieur nous avons donc en réalité les signaux

$$v_e(t) = v_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad v_r(t) = v_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) + v_2 \cos(\Omega t).$$

29. Établir l'expression linéarisée de $v_s(t)$.

30. On suppose que $\Omega \gg \omega_0 \gg 1/(RC)$. En déduire $v_f(t)$ et conclure quant à l'intérêt de ce montage.

c. Amplification du signal

Le signal récupéré par le télémètre étant fortement atténué, une amplification est nécessaire. Les constructeurs proposent des amplificateurs d'instrumentation intégrés de structure simple, proche de celle de la figure 8.

Les composants symbolisés par des rectangles à trois bornes sont des Amplificateurs Opérationnels^a (AO1, AO2, AO3).

^a. Le nom officiel est aujourd'hui Amplificateur Linéaire Intégré (ALI).

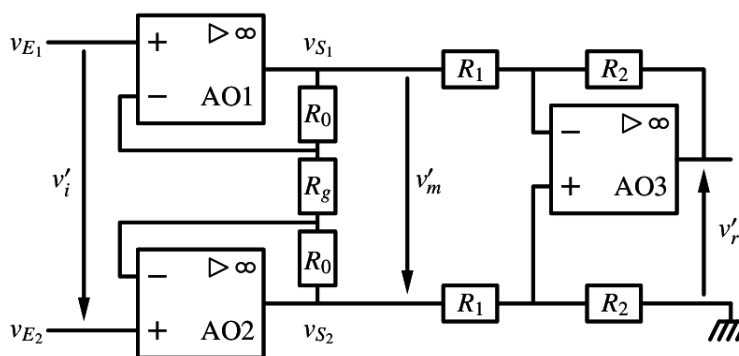


Figure 8 – Étage amplificateur.

Ces AO sont considérés idéaux (symbole ∞) et fonctionnent en régime linéaire. Cela signifie :

- d'une part que les courants entrant au niveau des bornes + et - sont toujours nuls,
- et d'autre part que les potentiels des bornes + et - d'un même AO sont toujours égaux.

On notera aussi que chacun de ces AO délivre un courant en sa sortie (côté droit), mais ce courant n'est pas connu a priori, puisqu'il dépend du reste du circuit. On peut bien sûr le déterminer si besoin à l'aide des lois de Kirchhoff.

31. Montrer que les résistances R_0 et R_g sont parcourues par un même courant. En déduire alors l'expression de $\underline{H}_{12}(j\omega) = \frac{v'_m}{v'_i}$.
32. Déterminer l'expression de $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{v'_r}{v'_m}$. En déduire que $v'_r = A v'_i$ avec $A = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_0}{R_g}\right)$.
33. Sachant que les AO ne peuvent fournir une tension de sortie¹ supérieure à 15 V en valeur absolue, estimer la valeur maximale du coefficient d'amplification à ne pas dépasser pour le signal 2 de la figure 6, qui est visualisé avant amplification.

1. La sortie d'un AO est la troisième borne, du côté du triangle et du symbole ∞ .

III. Perturbation des circuits électriques par la foudre

Un coup de foudre est une décharge électrique constituant un courant de forte intensité et de courte durée. Lors de la décharge d'un coup de foudre, on a réalisé l'enregistrement de l'intensité de ce courant, $I(t)$, qui est représentée sur la figure 9. L'intensité maximale atteinte est de 30 kA.

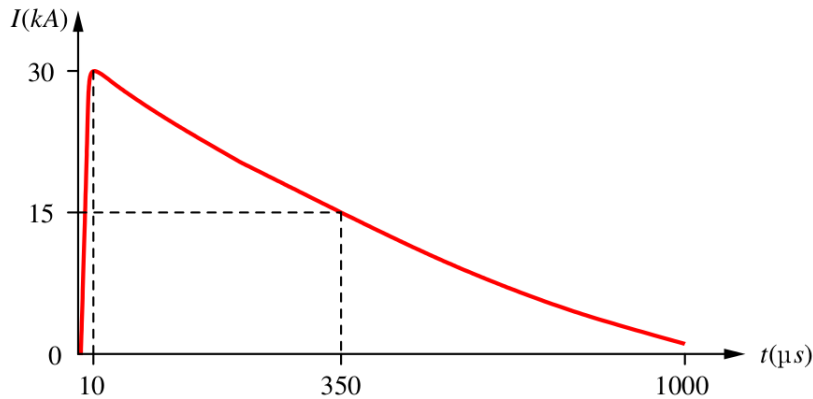
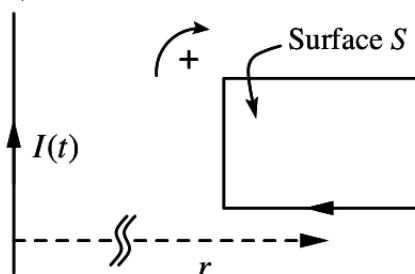


Figure 9 – Enregistrement de l'intensité électrique d'un coup de foudre.

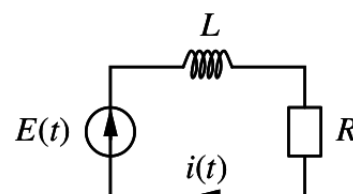
34. Rappeler la relation liant la charge à l'intensité d'un courant électrique. À l'aide de la figure 9, estimer la charge totale transportée par l'éclair. En déduire l'intensité moyenne du courant transporté par l'éclair.
35. On peut modéliser cette courbe par une équation du type $I(t) = I_0[\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)]$.
A quel type d'équation différentielle une telle évolution temporelle correspond-elle ? Que pourrait-on dire du facteur de qualité associé à ce système électrique ? Justifier.
36. Déterminer l'expression du *temps de montée* t_m de ce signal électrique, c'est-à-dire la durée nécessaire pour qu'il atteigne son maximum, en fonction de α et β .
37. Ce signal est une onde de courant normalisée, de type 10/350. Cela signifie que l'intensité électrique est maximale à la date $t_1 = 10 \mu\text{s}$ et qu'à la date $t_2 = 350 \mu\text{s}$, elle a atteint la moitié de sa valeur maximale. À l'aide de ces informations, poser un système de deux équations indépendantes de I_0 permettant d'obtenir les constantes α et β , que l'on ne calculera pas.

On considère maintenant le circuit électrique domestique d'alimentation d'une lampe. On l'assimile, pour simplifier, à un cadre rectangulaire de surface S , situé à la distance r d'un éclair (voir figure 11a). On modélise l'éclair par un fil rectiligne vertical infini parcouru par un courant électrique d'intensité $I(t)$. Il produit un champ magnétique au niveau du circuit, d'expression $B(r, t) = KI(t)/r$.

En l'absence d'éclair, le circuit électrique domestique contient une alimentation alternative de force électromotrice $E(t)$, une bobine d'inductance L et la résistance R associée aux fils et à la lampe (voir figure 11b).



(a) Modélisation de la présence d'un éclair (à gauche) près d'un circuit domestique (à droite).



(b) Modélisation électrique du circuit domestique en l'absence d'éclair.

En présence de l'éclair, il apparaît une seconde force électromotrice $e(t)$ dans ce circuit, orientée par convention dans le même sens que $E(t)$. On l'appelle *force électromotrice induite*, car elle est induite par le champ magnétique du à l'éclair. Une modélisation simple² conduit à $e(t) = -\frac{KS}{r} \frac{dI(t)}{dt}$.

2. cf programme de SPE.

38. À quel moment du coup de foudre, enregistré sur la figure 9, la force électromotrice induite est-elle maximale (en valeur absolue) ?
39. Établir l'équation différentielle électrique complète vérifiée par le courant $i(t)$ dans ce circuit, en tenant compte de la perturbation due à l'orage.
40. On note
- $i_d(t)$ une solution particulière de cette équation différentielle en l'absence de foudre,
 - $i_f(t)$ une solution particulière de cette équation différentielle en présence de foudre mais en l'absence d'alimentation alternative ($E(t) = 0$).
- Sans chercher pour l'instant à calculer $i_d(t)$ et $i_f(t)$, donner la forme générale de la solution de cette équation différentielle. En vertu de quel principe peut-on écrire cela ?
Quel est le temps caractéristique τ de disparition du régime transitoire ?
41. Pour terminer, on se place en l'absence de foudre, donc $i_f(t) = 0$.
- a) En prenant $E(t) = E_m \cos(\omega t)$, calculer $i_d(t)$ en fonction des données.
 - b) Etablir l'expression complète de $i(t)$ en fonction des données, en supposant que l'interrupteur de la lampe est fermé à l'instant $t = 0$.

Les perturbations électriques provoquées par la foudre ne sont pas seulement aériennes, elles se poursuivent dans le sol et peuvent être cause d'électrocutions. Toutefois, le traitement de cette partie du problème requiert le programme de SPE.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *

Pensez à rendre votre annexe avec la copie.