

# ÉLECTROCINÉTIQUE

## I. Etude expérimentale d'un circuit RLC

1. On travaille sur la figure de droite ( $u_c(t)$ ). A l'aide d'une règle graduée, on mesure les deux premiers maxima du régime transitoire à  $u_{cH_{m1}} = 4,0$  div et  $u_{cH_{m2}} = 2,0$  div. Ceci conduit à  $\delta = \ln \frac{u_{cH_{m1}}}{u_{cH_{m2}}} = \underline{0.69}$ .

La division horizontale correspond à 6 mm pour 0,2 ms. On mesure  $T = \frac{42}{6} \frac{0,2 \times 10^{-3}}{5} = 2,8 \times 10^{-4}$  s.

La tension  $u_c$  tend vers son régime permanent :  $u_c = E = 2,75$  V.

2. Etant données les relativement nombreuses oscillations, on peut admettre que le facteur de qualité est relativement grand et que les extremas de la courbe sont sur l'enveloppe exponentielle. Ceci conduit à  $u_{cH_{m1}} \approx K e^{-\omega_0 t_{m1}/(2Q)}$  et  $u_{cH_{m2}} \approx u_{cH_{m1}} \cdot e^{-\omega_0 T/(2Q)}$  d'où  $\delta = \frac{\pi T}{T_0 Q}$ .

Par ailleurs les calculs du cours (équation caractéristique) conduisent à  $T = T_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  donc

$Q = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}} \approx \frac{\pi}{\delta}$ , la seconde égalité étant vraie si  $\delta$  est suffisamment petit. On en déduit  $Q \approx 4,6$  (4,5 avec l'approximation), ce qui justifie a posteriori l'approximation des grands  $Q$ .

Enfin on réutilise directement  $\delta = \frac{\pi T}{T_0 Q}$  d'où  $\omega_0 = \frac{2\delta Q}{T} = \frac{2\pi}{T} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \underline{2,3 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$  (1ère expression plus facile à utiliser).

3. La première expérience conduit à  $R$  car en régime stationnaire, la bobine équivaut à un fil, le condensateur à un interrupteur ouvert, et donc le circuit se réduit à une résistance vérifiant :  $E_0 = Ri_E$ . D'où  $R = \frac{E}{i_E} = \underline{9,8 \times 10^3 \Omega}$ .

Par ailleurs, les valeurs de  $\omega_0$  et  $Q$  conduisent à  $L$  et  $C$ . On cherche l'équation différentielle vérifiée par  $u_c$  pour connaître les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$ . La loi des mailles s'écrit, en incluant la loi des noeuds directement :

$$E = L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R} \right) + u_c = LC \ddot{u}_c + \frac{L}{R} \dot{u}_c + u_c = \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{u}_c + \frac{1}{\omega_0 Q} \dot{u}_c + u_c$$

On en déduit que  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$  (l'opposé du cas RLC série). Finalement on obtient

$$C = \frac{Q}{R\omega_0} = \underline{2,1 \times 10^{-8} \text{ F}} \text{ et } L = \frac{R}{\omega_0 Q} = \underline{9,5 \times 10^{-2} \text{ H}}$$

## II. Modélisation d'un résonateur à quartz - (d'après Concours Sup 2004 Mines Albi, Alès, Douai, Nantes)

### 1. Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz

- On obtient  $m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + \beta V$ .
- On obtient  $C_p = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\pi d^2}{4e} = \underline{8,0 \times 10^{-12} \text{ F}}$ , et  $q_1 = C_p V$ .
- On multiplie l'équation du 1. par  $\gamma$ , ce qui conduit à  $m\ddot{q}_2 = -kq_2 - h\dot{q}_2 + \beta\gamma V$ .

4. L'équation précédente se réécrit  $V = \frac{h}{\beta\gamma} \dot{q}_2 + \frac{k}{\beta\gamma} q_2 + \frac{m}{\beta\gamma} \ddot{q}_2$ . Par ailleurs, le schéma électrique équivalent conduit à une équation analogue :  $V = R\dot{q}_2 + \frac{1}{C_s} q_2 + L\ddot{q}_2$ . Par identification des coefficients, on peut donc définir les constantes du modèle électrique équivalent pour  $q_2$  :  $R = \frac{h}{\beta\gamma}$ ,  $C_s = \frac{\beta\gamma}{k}$  et  $L = \frac{m}{\beta\gamma}$ .

### 2. Etude de l'impédance équivalente du quartz

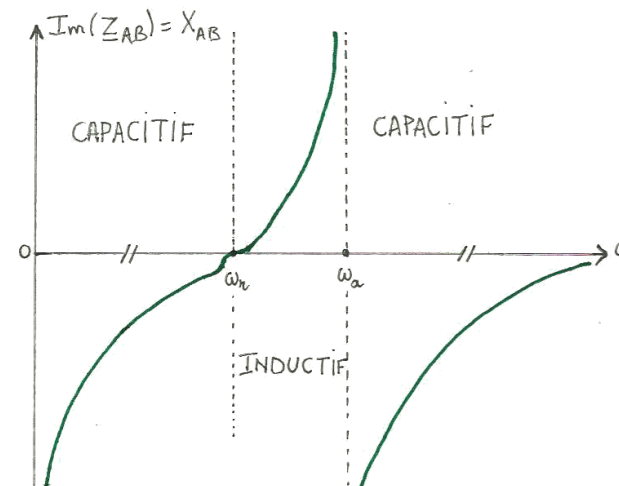
5. On commence par appliquer les règles d'association, puis on restructure l'expression en visant celle demandée...

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= \left[ jC_p\omega + \left( \frac{1}{jC_s\omega} + jL\omega \right)^{-1} \right]^{-1} = -\frac{j}{C_p\omega} \left[ 1 + \left( \frac{C_p}{C_s} - LC_p\omega^2 \right)^{-1} \right]^{-1} = -\frac{j}{C_p\omega} \frac{\frac{C_p}{C_s} - LC_p\omega^2}{1 + \frac{C_p}{C_s} - LC_p\omega^2} \\ &= -\frac{j}{\alpha\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} \text{ avec } \alpha = C_s + C_p ; \omega_r^2 = \frac{1}{LC_s} \text{ et } \omega_a^2 = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} \right). \end{aligned}$$

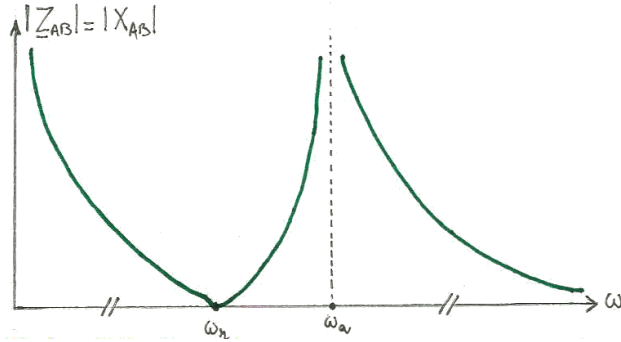
Grâce à la dernière expression, on observe que  $\omega_a^2 \geq \frac{1}{LC_s} = \omega_r^2$ .

6.  $f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} \right)} = \underline{800 \text{ kHz}}$  et  $f_r = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC_s}} = \underline{796 \text{ kHz}}$ .

7.  $\underline{Z}_{AB} = jX_{AB}$  est imaginaire pure. La réactance associée est  $\Im\{X_{AB}\} = -jZ_{AB} = \frac{1}{\alpha\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$ . Le dipôle est inductif si  $X_{AB} > 0$ , donc si  $\omega_r < \omega < \omega_a$ , capacitif sinon. De plus,  $X_{AB}$  s'annule en  $\omega_r$  et diverge en 0 et  $\omega_a$ .



8.  $|Z_{AB}| = |X_{AB}|$  d'où le graphe :



### 3. Etude expérimentale de la résonance d'un quartz

9. Par la loi du pont diviseur de tension, on a 
$$\underline{H} = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{AB}/R_v}$$
.

Comme  $\underline{Z}_{AB}$  est imaginaire pure, on a

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\underline{Z}_{AB}|^2/R_v^2}} \quad \text{donc} \quad |H| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |\underline{Z}_{AB}| = R_v.$$

Ainsi, en réglant  $R_v$  pour chaque fréquence de telle sorte que l'amplitude de la tension de sortie soit 2 fois plus petite que l'amplitude de la tension d'entrée, on obtient les valeurs de  $|\underline{Z}_{AB}|$  associées.

10. Pour  $R_v$  fixé,  $|H|$  admet un maximum lorsque  $|\underline{Z}_{AB}|$  admet un minimum. Donc il y a une résonance en tension  $V_S$  là où  $|\underline{Z}_{AB}|$  s'annule, c'est-à-dire en  $[\omega = \omega_r]$  ou  $[f = f_r] = 796 \text{ kHz}$ . Comme  $V_S = R_v i$  (en prenant  $i$  le courant orienté de  $A$  vers  $B$ ) il s'agit bien aussi d'une résonance en courant.

11.  $|\underline{Z}_{AB}|$  s'annule en  $[\omega = \omega_r]$  car le groupement  $\{C_s, L\}$  équivaut alors à un fil :  $\frac{1}{jC_s\omega_r} + jL\omega_r = 0$ . Donc au voisinage de cette pulsation, l'admittance de ce groupement tend vers l'infini (en module) et donc domine celle de la capacité  $C_p$  (ce qui peut se voir dans la première expression de  $\underline{Z}_{AB}$  ci-dessus). Ainsi,

$$\underline{Z}_{AB} \approx \frac{1}{jC_s\omega} + jL\omega \quad \text{à l'approche de } \omega_r, \text{ donc de la résonance en courant.}$$

12. Le fait que le circuit résonne toujours en  $f = f_r$  malgré la prise en compte de  $R_g$  et  $R$  tient au fait que cette résonance ne dépend pas de la valeur de  $Q$  (donc de la résistance,  $R$ ). En considérant le résultat précédent, le circuit est simplifiable au voisinage de la résonance et correspond alors à un  $\{R_g + R, L, C_s\}$  série attaqué en tension par la *f.e.m* sinusoïdale du GBF. En effet, on additionne la résistance du GBF à celle du quartz, aussi très faible<sup>1</sup>.

En utilisant la mesure de la largeur de la résonance (ou bande passante)  $\Delta f = 50 \text{ Hz}$ , on détermine le facteur de qualité pour ce  $\{R_g + R, L, C_s\}$  série (inverse de l'acuité) :

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} = 15,9 \times 10^3.$$

et donc en déduire  $R$  car

$$Q = \frac{1}{R_g + R} \sqrt{\frac{L}{C_s}} \Rightarrow R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C_s}} - R_g = \Delta f \frac{\sqrt{L/C_s}}{f_r} - R_g.$$

Ceci conduit après simplification à  $R = 2\pi\Delta f L - R_g = 107 \Omega$  et  $Q_q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_s}} \approx 23,3 \times 10^3$ .

Le facteur de qualité est très grand. Cela permet de fabriquer des oscillateurs dont la fréquence de vibration est très précise et très élevée, d'où l'intérêt pour fabriquer des horloges (montres, etc).

1.  $R_g$  a été négligée jusqu'à présent pour simplifier les calculs et les raisonnements mais sans conséquence sur les résultats.