ÉLECTROCINÉTIQUE

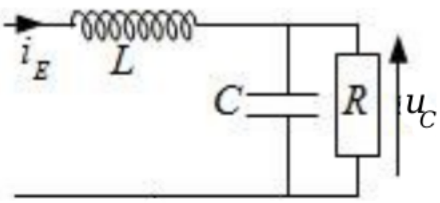
La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction (complète et concise). Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable.
Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le et poursuivez ; toute tentative d'arnaque sera sévèrement sanctionnée.

CALCULATRICES AUTORISÉES

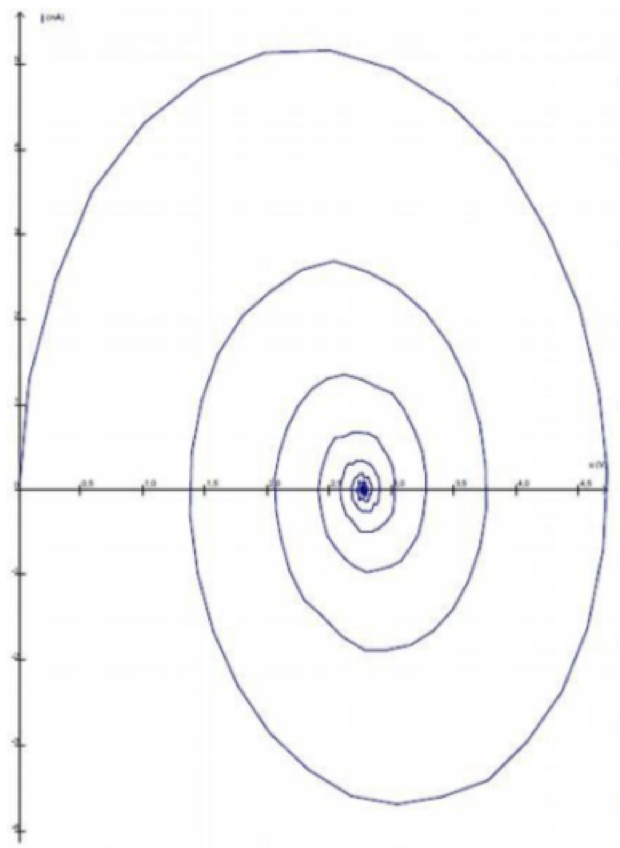
I. Etude expérimentale d'un circuit RLC

On considère le circuit ci-contre. On réalise deux expériences pour étudier ce circuit :

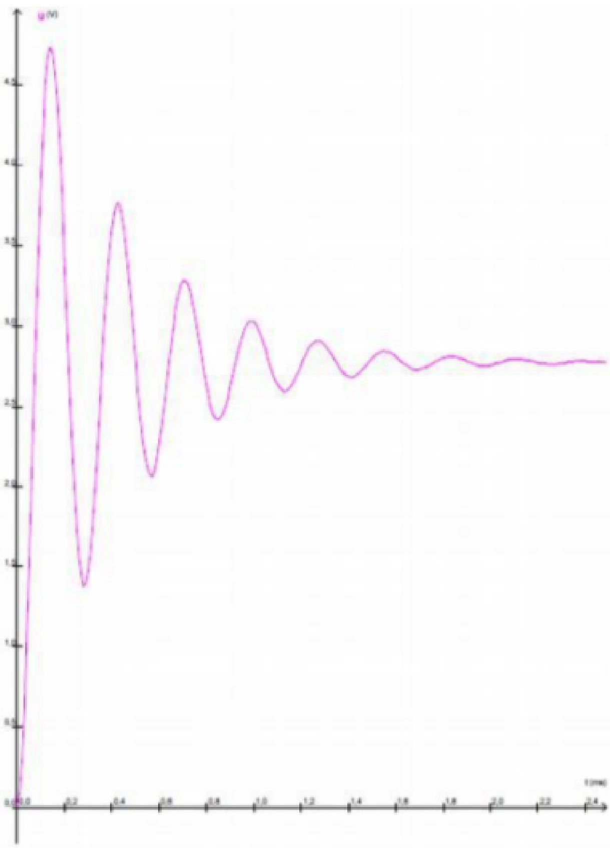
- On branche en entrée une tension continue $E_0 = 5,3\,\text{V}$ et après un temps suffisamment long, on mesure l'intensité i_E circulant en entrée. On mesure $i_E = 0,54\,\text{mA}$.
- On soumet le circuit à un échelon de tension de $0\,\text{V}$ à E. Les tracés du portrait de phase du condensateur et de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur sont présentés ci-dessous.



1. Déterminer au moyen des graphiques le décrément logarithmique δ et la pseudo-période T du signal ainsi que la valeur de E.
2. En déduire, en justifiant les expressions utilisées, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du système.
3. En déduire, en justifiant les expressions utilisées, les valeurs de R, L et C.



Portrait de phase du condensateur : $i_E = f(u_c)$.
Echelle : abscisse 0,5 V/div ; ordonnée 1 mA/div.



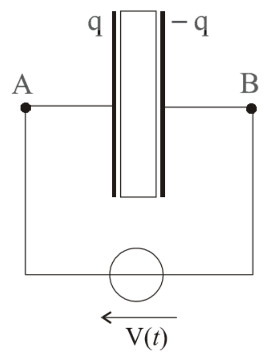
Evolution temporelle de u_c.
Echelle : abscisse 0,2 ms/div ; ordonnée 0,5 V/div.

II. Modélisation d'un résonateur à quartz

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

II.1. Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz

Un cristal de quartz est taillé sous forme de pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre $d = 1,0\,\text{cm}$ et l'épaisseur de la pastille est $e = 0,2\,\text{mm}$. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées, cf ci-contre). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.



Modélisation mécanique

Lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $V(t) = V.\cos(\omega t)$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

Un élément de masse m du corps piézo-électrique, placé à une distance x de son point de repos, est soumis aux forces suivantes, toutes orientées selon un axe (Ox) que l'on ne précise pas ici :

- une force de rappel de type élastique $-k.x$ ($k > 0$) qui a pour origine la rigidité du matériau ;
- des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $-h\dot{x}$;
- une force électrostatique due à l'effet piézo-électrique $\beta.V(t)$ ($\beta > 0$) ;
- le poids est négligé.

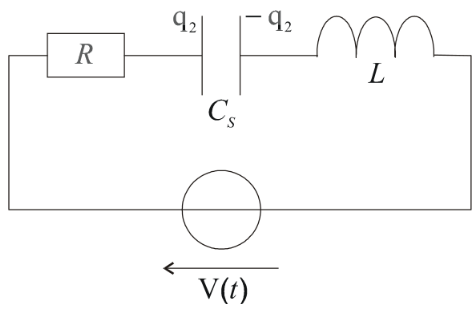
1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au petit élément de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en supposant que le mouvement se fasse selon l'axe (Ox).

Modélisation électrique

La charge totale q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

- les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_p, d'où une charge $q_1(t)$,
- l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à x : $q_2(t) = \gamma.x(t)$.

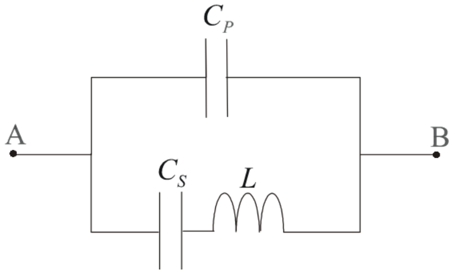
2. On admet que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_p = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{e}$ où S est la surface d'une électrode, e l'épaisseur du condensateur, ε_0 la permittivité du vide et ε_r la permittivité relative du quartz.
   Estimer alors la capacité C_p appelée *capacité de connexion*. AN : $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}\,\text{F.m}^{-1}$, $\varepsilon_r = 2,3$.
   Quelle est la relation entre la charge q_1, la capacité C_p et la tension $V(t)$?



3. En reprenant l'équation différentielle obtenue pour $x(t)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge $q_2(t)$.
4. Montrer que la charge $q_2(t)$ du quartz correspond à celle du condensateur d'un circuit R, L, C_s série soumis à la tension $V(t)$ (cf ci-contre).
   On donnera alors les expressions de R, L et C_s en fonction de m, h, β, γ et k.

II.2. Etude de l'impédance équivalente du quartz

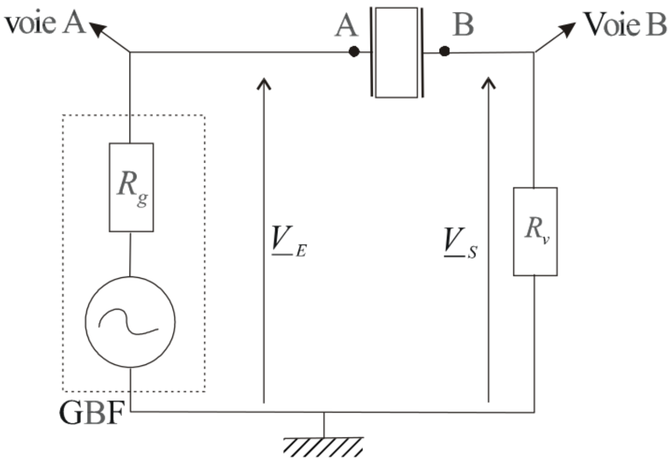
Dans cette partie, on néglige la résistance R du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors donné sur la figure ci-contre. Pour les applications numériques, on prendra $L = 500\,\text{mH}$, $C_s = 0,0800\,\text{pF}$ et $C_p = 8,00\,\text{pF}$.
On se placera toujours en régime sinusoïdal forcé (les grandeurs dépendront de la pulsation ω).



5. Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B. On l'écrira sous la forme :
$$\underline{Z}_{AB} = -\frac{j}{\alpha\omega}\,\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$$
où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$. On donnera, en fonction de L, C_p et C_s les expressions de α, ω_a^2 et ω_r^2.
Montrer aussi que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.
On pourra admettre les résultats de cette question pour poursuivre la résolution du problème.
6. Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a^2 et ω_r^2.
7. Représenter l'allure du graphe de la partie imaginaire de $\underline{Z}_{AB}$ en fonction de ω. On indiquera clairement le comportement en ω_r et ω_a (ne pas respecter l'échelle pour la clarté du dessin).
Indiquer sur le graphe la(les) zone(s) où le comportement du quartz est inductif ou capacitif.
8. Tracer l'allure de $|\underline{Z}_{AB}|$, le module de l'impédance complexe du quartz, en fonction de ω.

II.3. Etude expérimentale de la résonance d'un quartz

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne $R_g = 50\,\Omega$. On dispose d'une résistance variable, d'un quartz et d'un oscilloscope. On réalise alors le montage de la figure ci-contre.



Dans cette question on néglige toujours la résistance du quartz sauf dans la question 12.

9. Calculer le rapport $\underline{H} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$ en fonction de R_v et de $\underline{Z}_{AB}$.
Expliquer comment on peut déterminer expérimentalement la courbe de $|\underline{Z}_{AB}|$ en fonction de la fréquence, si pour chaque fréquence on ajuste la résistance R_v de telle sorte que $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
10. On fixe maintenant R_v à une valeur quelconque et on fait varier la fréquence. Montrer que quelle que soit la valeur de R_v, on observe une résonance en courant, et dire pour quelle fréquence.
11. Au voisinage de cette fréquence de résonance en courant, on a $\underline{Z}_{AB} \approx \frac{1}{jC_s\omega} + jL\omega$. Expliquer cette relation, sans calcul.
12. On relève la courbe de résonance en intensité dans le cas où $R_v = 0$, à l'aide d'un ampère-mètre localisé à la place de R_v. Autour du pic de résonance d'intensité situé vers 796 kHz, on mesure une *bande passante* de 50 Hz (ou *largeur de résonance*, correspondant aux fréquences telles que l'amplitude du courant soit plus petite que celle à la résonance d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Quelle est la valeur numérique du facteur de qualité Q du circuit complet (constitué du générateur associé au quartz) ?
En déduire la valeur de la résistance R du quartz, et son facteur de qualité Q_q.

* * * Fin de l'épreuve * * *