DIMENSIONS - SIGNAUX

I. Un modèle d'élasticité d'une barre d'acier

1. $[E] = \left[\frac{L^3 F}{Y d^4}\right] = [F].L^{-2} = MLT^{-2}L^{-2}$, d'où $\boxed{[E] = ML^{-1}T^{-2}}$.
   On peut donc proposer le $\underline{\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}}$ comme unité SI. Toutefois puisqu'il s'agit d'une force par unité de surface, on lui donne couremment l'unité de pression SI qu'est le Pascal : $\underline{1\,\text{Pa} = 1\,\text{N.m}^{-2}}$.

2. La force est proportionnelle à la flèche Y, soit en valeur algébrique : $\boxed{F = k\,Y}$ avec $\boxed{k = \dfrac{Ed^4}{7L^3}}$.

3. On obtient $\underline{k = 3,0\,10^2\,\text{Nm}^{-1}}$.

4. a) La flèche mesure la déformation de la barre, et la force lui est proportionnelle. Donc elle joue le même rôle que l'allongement pour un ressort. On propose donc $\boxed{E_{p_{\text{el}}} = \frac{1}{2}kY^2}$.

   b) Par définition $\boxed{E_m = E_c + E_{p_{\text{el}}} = \rho L d^2\,\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}kY^2}$.

   c) En l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée au cours du temps [1]. On en déduit

   $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \dot{Y}.\left[2\rho L d^2\,\ddot{Y} + k\,Y\right]$$

   d'où après simplification par $\dot{Y}$: $\boxed{2\rho L d^2 \ddot{Y} + kY = 0}$.

   d) On réécrit cette équation sous forme canonique :

   $$\boxed{\ddot{Y} + \omega_0^2\,Y = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{Ed^2}{14\rho L^4}}}$$

   La solution générale de cette équation sans second membre s'écrit

   $$\boxed{Y(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2\,.$$

   e) On applique les conditions initiales :
   - $Y(0) = Y_m = A$;
   - $\dot{Y}(0) = 0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$.

   Finalement, on obtient la loi horaire $\boxed{Y(t) = Y_m\,\cos(\omega_0 t)}$.

5. $\boxed{f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{Ed^2}{14\rho L^4}}} = \underline{2,3\,\text{Hz}}$.

6. On mesure sur le graphe $T_0 = \frac{1{,}8-0{,}075}{2{,}5} = \underline{0,44\,\text{s}}$. Comme $f_0 = 1/T_0$ on obtient $\boxed{E = \dfrac{56\pi^2\rho L^4}{T_0^2 d^2}} = \underline{2,1\times 10^{11}\,\text{Pa}}$.

7. a) On obtient $\boxed{E_c = \frac{1}{2}(m + m_c)\,\dot{Y}^2}$ en posant $m = 2\rho L d^2$. D'autre part il faut compter l'énergie potentielle du capteur : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kY^2 + m_c g Y}$ (l'axe vertical étant ascendant, l'énergie potentielle s'écrit $+m_c g Y$).

[1] Nous dirons plus tard que le système ne subit que des forces *conservatives* (une seule ici).

   b) En dérivant l'énergie mécanique, qui est de nouveau constante, on obtient :

   $$\dot{Y}\,\left[(m + m_c)\,\ddot{Y} + kY + m_c g\right] = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{Y} + \frac{k}{m+m_c}\,Y = -\frac{m_c g}{m+m_c}}$$

   L'apparition d'un second membre constant se traduit par l'ajoût d'une solution particulière constante, qui représente la position d'équilibre de la barre, qui est aussi la position moyenne autour de laquelle la barre oscille. Elle vaut maintenant $\boxed{Y_{\text{eq}} = -\frac{m_c g}{k}}$ (obtenu en cherchant une solution particulière $Y_p = Y_{\text{eq}}$ constante).

   On a aussi modifié la fréquence propre du mouvement, qui vaut $\boxed{f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+m_c}} = f_0\,\sqrt{\frac{m}{m+m_c}}} < f_0$.

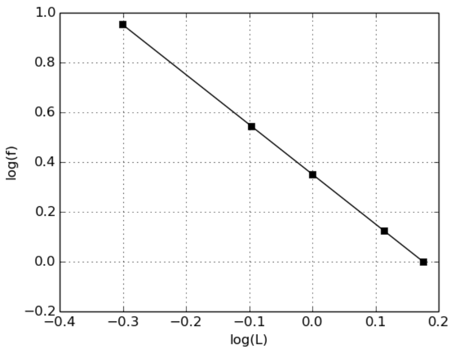
   Elle est inférieure au cas précédent sans capteur : la barre oscille moins rapidement car elle a plus d'inertie (son extrémité est plus lourde).

8. Pour vérifier une loi du type $f = \alpha L^n$, on trace le graphe $\log f = g(\log L)$.

Si c'est une droite, on peut identifier son équation à $\log f = \log\alpha + n\log L$. A la calculatrice, on calcule les valeurs

$\log f$	-0,30	-0,10	0,0	0,11	0,18
$\log L$	0,96	0,55	0,35	0,12	0,0

Le tracé est reproduit ci-contre.
Comme on le voit, la loi est très bien vérifiée. Le coefficient de corrélation est 0,9999. Le coefficient directeur est $-2,00$. Ceci correspond bien à la loi trouvée à la question 5..



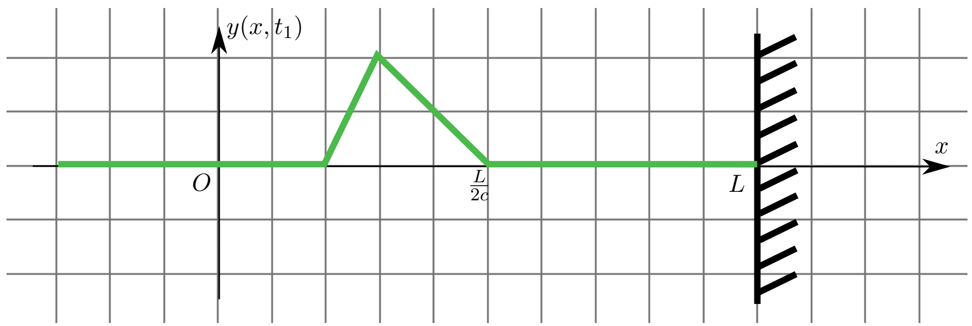
II. Propagation d'une déformation sur une corde vibrante

1. Le front avant de l'onde étant situé en $x = 0$ à $t = 0$, il atteint le mur à l'instant $\boxed{t_r = \frac{L}{c}}$.

2. En supposant $t > 0$ par exemple, la corde à t en x a la hauteur qu'elle avait à $t = 0$ à la distance ct vers la gauche de ce point, donc :

   $$\boxed{y(x,t) = y(x - ct, 0) = F_i(x - ct)}.$$

3. A l'instant t_1, la distance parcourue depuis $t = 0$ est $L/2$, d'où l'allure :

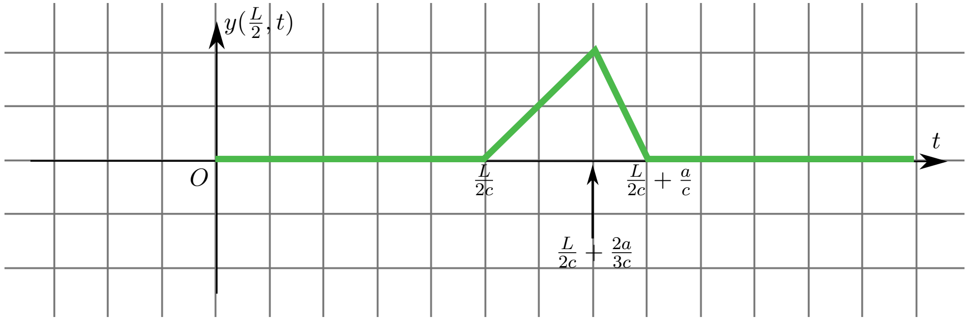


Corde à l'instant $t = t_1 = \frac{L}{2c}$.

4. On a donc $y(\frac{L}{2},t) = F_i(\frac{L}{2} - ct)$, donc l'expression s'obtient en remplaçant x dans $F_i(x)$ par $\frac{L}{2} - ct$:

$$y(\tfrac{L}{2},t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t > \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + a\right) \\ \frac{3h}{a}\left(\frac{L}{2} - ct + a\right) & \text{si} \quad \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + \frac{2a}{3}\right) \le t < \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + a\right) \\ -\frac{3h}{2a}\left(\frac{L}{2} - ct\right) & \text{si} \quad \frac{L}{2c} \le t < \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + \frac{2a}{3}\right) \\ 0 & \text{si} \quad t < \frac{L}{2c} \end{cases}$$

Au delà des expressions mathématiques explicites, le signe $-$ dans le changement de variable $x \mapsto \frac{L}{2} - ct$ introduit une inversion de l'axe des abscisses entre x et t, d'où une réflexion sur la courbe, dont la pente forte se trouve maintenant en avant :



Corde en $x = \frac{L}{2}$ en fonction du temps.

5. Le mur empêche l'énergie portée par l'onde de traverser, donc le flux d'énergie s'inverse grâce à la formation d'une onde réfléchie qui se propage en sens inverse.

6. a) On applique le même raisonnement que précédemment, mais l'onde se propage vers la gauche donc $\boxed{y_r(x,t) = F_r(x+ct)}$.

   b) Par le principe de superposition, on peut sommer l'onde incidente et l'onde réfléchie. L'onde totale s'écrit donc $\boxed{y(x,t) = F_i(x-ct) + F_r(x+ct)}$.

7. a) La corde ne peut s'écarter de sa position là où elle est fixée, donc en $x = L$:

$$\boxed{y(L,t) = 0 = F_i(L-ct) + F_r(L+ct) \quad \forall\, t \ge t_r}.$$

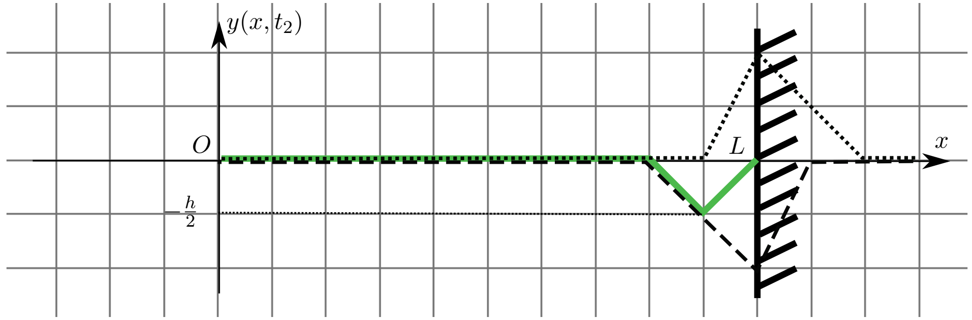
   b) On en déduit que $y_r(L,t) = F_r(L+ct) = -F_i(L-ct)$. Ensuite, l'onde réfléchie en x à l'instant t est égale à l'onde en L à un instant inférieur diminué du temps de propagation de L à x : $y_r(x,t) = y_r(L, t - \frac{L-x}{c})$. On en déduit finalement $y_r(x,t) = -F_i\left(L - c(t - \frac{L-x}{c})\right)$, ou après simplification :

$$\boxed{y_r(x,t) = -F_i(2L - (x+ct))}.$$

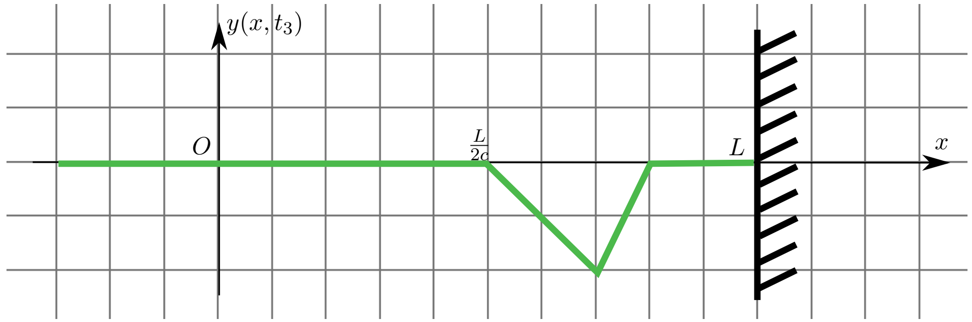
   Par conséquent l'onde totale s'écrit $\boxed{y(x,t) = F_i(x-ct) - F_i(2L-(x+ct))}$.
   Remarque : on obtient notamment $y_r(x,0) = -F_i(2L-x) = F_r(x)$, donc à $t = 0$ l'onde réfléchie est obtenue par une symétrie centrale par rapport au point du mur $(x = L, y = 0)$. L'onde réfléchie est bien située derrière le mur...

8. a) A t_2, l'onde incidente $F_i(x-(L+\frac{2a}{3}))$ est obtenue par une translation en x de $L+\frac{2a}{3}$ de l'onde initiale (pointillé), alors que l'onde réfléchie $-F_i(-(x-(L-\frac{2a}{3})))$ s'obtient d'abord par une translation en x de $L - \frac{2a}{3}$ puis une symétrie centrale par rapport au point $(x = L - \frac{2a}{3}, y = 0)$ (tirets). L'onde résultante est la somme des deux ondes (trait continu).
   Remarque : la perturbation est moins ample que la perturbation initiale à cet instant (jusqu'à $-\frac{h}{2}$). L'énergie manquante dans la déformation (énergie potentielle de type élastique) est compensée par une énergie cinétique plus élevée.

   b) A t_3 l'onde incidente n'existe plus (elle est du côté droit du mur). Seule l'onde réfléchie est présente, et vaut $-F_i(-(x-\frac{L}{2}))$. Elle s'obtient donc par une translation de l'onde initiale de $\frac{L}{2}$ puis une symétrie centrale par rapport au point $(x = \frac{L}{2}, y = 0)$.



Corde à l'instant $t = t_2 = \frac{L+2a/3}{c}$.



Corde à l'instant $t = t_3 = \frac{3L}{2c}$.

III. Vibration d'une goutte d'eau

Soit k une constante numérique sans dimension, on propose une loi sous la forme d'un produit de puissances :

$$f = k\, R^\alpha\, \rho^\beta\, \sigma^\gamma$$

Par analyse dimensionnelle,

$$[f] = T^{-1} = [R]^\alpha\, [\rho]^\beta\, [\sigma]^\gamma = L^\alpha \,.\, M^\beta L^{-3\beta} \,.\, M^\gamma T^{-2\gamma} = M^{\beta+\gamma}\, L^{\alpha-3\beta}\, T^{-2\gamma}$$

ce qui conduit nécessairement à

$$\begin{cases} -2\gamma &= -1 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - 3\beta &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= -\frac{1}{2} \\ \gamma &= -\frac{3}{2} \end{cases}$$

On peut donc proposer $\boxed{f = k\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3}}}$. Pour une constante σ donnée (c'est-à-dire une interface fixée : nature du liquide et du support...), la fréquence propre décroît lorsque la masse/taille de la goutte augmente.
Remarque : on retrouve ainsi le rôle de l'inertie qui apparaît dans l'oscillateur harmonique sous une forme an analogue : $f \# \sqrt{\frac{k}{m}}$.