INDUCTION

I. Dispositifs à induction dans un véhicule ***(d'après CCP TSI 2013)***

I.1. Amortissement électromagnétique

1. **a)** $\Phi = Baz$.

b) Loi de Faraday en convention générateur : $e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Ba\dot{z}$.

c) **SCHEMA** $e = Ri$ donc $\boxed{i = -\dfrac{Ba}{R}\,\dot{z}}$.

2. Les forces appliquées aux portions de cadre verticales se compensent mutuellement car le courant change de sens. Seul le côté horizontal (supérieur) contribue à la force de Laplace : $\boxed{\vec{F} = aBi\vec{u}_z}$.

3. Ceci conduit à $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{a^2B^2}{R}\,\dot{z}\vec{u}_z}$. Il s'agit d'une force linéaire en la vitesse verticale et qui lui est toujours opposée, donc elle agit comme une force de frottement fluide.
Un tel système a l'avantage de ne pas nécessiter de contact mécanique, et aussi d'être réglable via l'ajustement du champ magnétique.

4. Posons $\vec{F} = -h\,\dot{z}\vec{u}_z$ avec $h = \frac{a^2B^2}{R}$, d'où $\boxed{B = \dfrac{\sqrt{hR}}{a}}$.

5. On obtient $B = \underline{10\,\mathrm{T}}$.
Un aimant permanent peut produire un champ de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} T.
On peut atteindre 10 T à l'aide d'un électro-aimant (ex : dans les appareil IRM-RMN).

I.2. Freinage électromagnétique

6. Le mouvement de la roue induit une variation de flux dans les spires qui baignent partiellement dans le champ magnétique, donc des fem induites. Ceci induit des courants qui donnent lieu à des forces de Laplace dont l'effet doit être de freiner la roue, en vertu de la Loi de Lenz.

7. **SCHEMA** En notant θ l'angle du secteur circulaire plongé dans le champ magnétique (orienté dans le sens de ω), le flux magnétique vaut $\Phi = \frac{1}{2}L^2\theta$ d'où $\boxed{e = -\frac{1}{2}L^2\omega}$.

8. Considérons d'abord les spires formées par deux rayons consécutifs qui baignent dans le champ $\vec{B}$. Elles sont traversées par un flux constant, donc **la fem induite totale dans chacune est nulle**. Donc en procédant de proche en proche depuis le rayon (ON) (qui est le siège de la fem e centripète), on en déduit que chaque rayon immergé dans $\vec{B}$ est le siège d'une fem égale $e = -\frac{1}{2}L^2\omega$ d'orientation centripète.
De même les spires totalement à l'extérieur du champ ne sont le siège d'aucune fem. Donc en procédant de proche en proche depuis le rayon (OM) (qui n'est le siège d'aucune fem), on en déduit que chaque rayon de la zone hors champ n'est le siège d'aucune fem induite.
Ceci est cohérent avec la seconde spire partiellement immergée (à droite), qui donnerait par le calcul un résultat symétrique à celui de la spire $(OMNO)$.

9. Chaque rayon immergé est de résistance R, il est soumis à la même tension u (car les arcs de cercle ne sont pas résistifs), et il est le siège de la même fem induite. Donc il est traversé par un courant centripète i_0 tel que $u = e - Ri_0$, c'est-à-dire $i_0 = (e-u)/R$. Ainsi c'est le même courant qui parcourt chacun de ces rayons.
On peut dire de même pour les rayons non immergés, qui sont tous parcourus par un même courant $i_1 = -u/R$.

10. La loi des nœuds impose $\frac{N}{2}(i_0+i_1) = 0$ donc $i_0 = -i_1$. On en déduit $u = \frac{e}{2}$ et $\boxed{i_0 = -i_1 = \dfrac{e}{2R} = -\dfrac{BL^2}{4R}\,\omega}$.

11. Chaque rayon immergé donne une contribution identique (attention on intègre en progressant le long d'un rayon dans le sens de i_0) :

$$\vec{\mathcal{M}}_i(O) = \int_{r=L}^{r=0} \vec{OP} \wedge (i_0\mathrm{d}\vec{OP} \wedge \vec{B}) = Bi_0\,(-\vec{e}_x)\int_L^0 r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}L^2Bi_0\,\vec{e}_x$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ revient à considérer un point d'application de la force de Laplace au milieu du rayon). Il y a $\frac{N}{2}$ tels rayons donc au total

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}(O) = \frac{1}{4}NL^2Bi_0\,\vec{e}_x}.$$

12. La roue subit les actions de Laplace ainsi que son poids et la réaction du support. Ces dernières actions donnent un moment résultant nul si la roue est équilibrée d'une part, et si la liaison pivot est idéale d'autre part. En remplaçant i_0 dans $\vec{\mathcal{M}}(O)$, le théorème du moment cinétique dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne :

$$J\dot{\omega} = -\frac{NL^2B}{16R}\,\omega \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} + \frac{1}{\tau}\,\omega = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{16RJ}{NB^2L^4}}.$$

La résolution conduit à $\boxed{\omega = \omega_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$. **SCHEMA**

13. Bilan mécanique : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -\frac{NL^2B}{16R}\,\omega^2 = \mathcal{P}_L$.
Bilan énergétique sur les rayons immergés : $2Ri_0 = e$ donc $\frac{N}{2}2Ri_0^2 = \frac{N}{2}ei_0 = -\mathcal{P}_L$.
D'où en sommant ces deux équations :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -NRi_0^2}.$$

Ainsi, **toute l'énergie cinétique de la roue est dissipée par effet Joule dans les résistances de tous les rayons**.

14. **a)** La puissance des actions de Laplace, $\mathcal{P}_L$, est proportionnelle à ω^2 donc la puissance de ce freinage est d'autant moins importante que le véhicule roule lentement. Ainsi le véhicule ne peut s'arrêter. Il faut un freinage secondaire qui permet de s'arrêter rapidement.

b) Dans les freins à disque, l'énergie cinétique du véhicule est convertie aussi en chaleur, mais par **frottements solides**.
Les freinages par courant de Foucault sont utiles à grande vitesse, et permettent d'**économiser les plaquettes de freins**, qui s'usent par frottement. D'autre part ils évitent le phénomène de **lubrification** par frottement au niveau du contact plaquettes-disques, qui peut se produire si les frottements sont intenses.

II. Détection de véhicules par boucle inductive *(d'après E3A MP 2012)*

II.1. Inductance de la boucle

1. *Attention : erreur d'énoncé. Il fallait négliger la zone occupée par le fil pour le calcul du flux. Mais il ne fallait pas prendre $e = 0$ sinon...*
L'élément de surface s'écrit en coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$, avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{u}_\theta$. Le flux doit être intégré sur le rectangle :

$$\Phi_b = \int_{z=0}^{b}\int_{r=e}^{a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u}_\theta.\mathrm{d}z\mathrm{d}r\vec{u}_\theta$$

On commence par intégrer séparémment selon z puisque l'intégrande ne dépend pas de z :

$$\Phi_b = b\int_{r=e}^{a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\mathrm{d}r \quad \text{donc} \quad \boxed{\Phi_b = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b\ln\frac{a}{e}}.$$

On voit qu'on ne peut pas du tout supposer que $e = 0$! !.

2. Pour trouver le flux total, il faut d'abord comptabiliser l'effet des 4 côtés du rectangle. Comme deux côtés opposés produisent le même flux (car le courant est dans le sens opposé), cela donne pour une spire : $2(\Phi_b + \Phi_a)$ avec $\Phi_a = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a\ln\frac{b}{e}$ la contribution des côtés de longueur a.
Chaque spire contribue au champ magnétique, et il faut sommer les flux dans chaque spire. Par conséquent le flux total est $\Phi = 2n^2(\Phi_b + \Phi_a)$, d'où $\boxed{L = n^2\frac{\mu_0}{\pi}\left(b\ln\frac{a}{e} + a\ln\frac{b}{e}\right)}$.

3. *Attention : 2ème erreur d'énoncé ! On a bien $b = 2,0\,\mathrm{m}$ (côté long) et $a = 1,0\,\mathrm{m}$ (côté court) comme sur la figure.*
Sachant que la section du fil vaut $s = \pi e^2$, on a $e = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$, ce qui donne finalement $\underline{L = 2,3\times10^{-4}\,\mathrm{H}}$.

II.2. Détection d'un véhicule

4. *Encore une maladresse de l'énoncé (original) : ici on considère des courants positifs, c'est-à-dire dont le sens réel est celui choisi pour l'orientation (car a priori l'orientation est arbitraire).*
La spire miroir doit créer un champ induit qui s'oppose au champ initial des spires enterrées, donc le courant dans la spire miroir tourne dans le sens contraire à celui dans les spires enterrées.

5. En utilisant l'échelle de la figure *(un peu rétrécie par la photocopie... mais on sait que $a = 1,0m$)*, on mesure les distances suivantes : $OC_1 = OC_2 = \frac{a}{2} = 0,5\,\mathrm{m}$, $AC_1 = 0,6\,\mathrm{m}$, $AC_2 = 0,4\,\mathrm{m}$, $BC_1 = 0,7\,\mathrm{m}$ et $BC_2 = 0,3\,\mathrm{m}$.
On en déduit les normes $\boxed{B(O) = \frac{\mu_0 i}{\pi OC_1}} = \underline{8,0\times10^{-7}\,\mathrm{T}}$, $\boxed{B(A) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{AC_1} + \frac{1}{AC_2}\right)} = \underline{8,3\times10^{-7}\,\mathrm{T}}$ et $\boxed{B(B) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{BC_1} + \frac{1}{BC_2}\right)} = \underline{9,5\times10^{-7}\,\mathrm{T}}$.

6. Par conservation du flux magnétique dans un tube de champ, le flux propre sur la partie centrale de la spire miroir est égal au flux induit dans la totalité de la spire enterrée. En considérant les petits tubes de largeur $\ell = 0,1\,\mathrm{m}$, le flux total à travers la spire vaut en valeur absolue

$$\boxed{\Phi_i = b\ell(B(O) + 2B(A) + 2B(B))} = \underline{8,7\times10^{-7}\,\mathrm{Wb}}.$$

7. Ce flux est de signe opposé au flux propre des spires enterrées (par loi de Lenz). On en déduit que la nouvelle inductance propre est réduite par rapport à celle sans véhicule : $L'_s = L_s + \Delta L_s$ avec $\Delta L_s = -\Phi_i/I$ et $I = 1\,\mathrm{A}$. Pour l'ensemble des n spires, le champ induit est multiplié par n et le flux aussi, donc $\Delta L = n^2\Delta L_s$. Ainsi les variations relatives sont égales et valent

$$\boxed{\frac{\Delta L_s}{L_s} = \frac{\Delta L}{L} = -\frac{n^2\Phi_i}{L}} = \underline{9,7\,\%}.$$

8. Notons i le courant qui sort du condensateur par le haut. En convention récepteur on a $i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. La maille s'écrit $u = ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ce qui conduit à

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

9. La résistance est proportionnelle à la longueur de fil donc à n.
L'inductance propre est proportionnelle à n^2, donc Q n'en dépend pas.

10. En présence d'un véhicule, L diminue, donc $\underline{f_0 \text{ augmente}}$.
Par dérivation logarithmique on obtient $\boxed{\frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{\Delta L}{2L}}$.

11. On obtient $\underline{\frac{\Delta f_0}{f_0} = -4,9\,\%}$. Le dispositif paraît donc **très sensible** car il s'agit d'une variation importante facile à mesurer. Le modèle proposé ici **sur-estime les courants induits** dans le véhicule car nous les avons considérés égaux aux courants dans les spires enterrées.