DIMENSIONS - SIGNAUX

La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction (complète et concise). Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats littéraux doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraissemblable.
Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le et poursuivez ; toute tentative d'arnaque sera sévèrement sanctionnée.

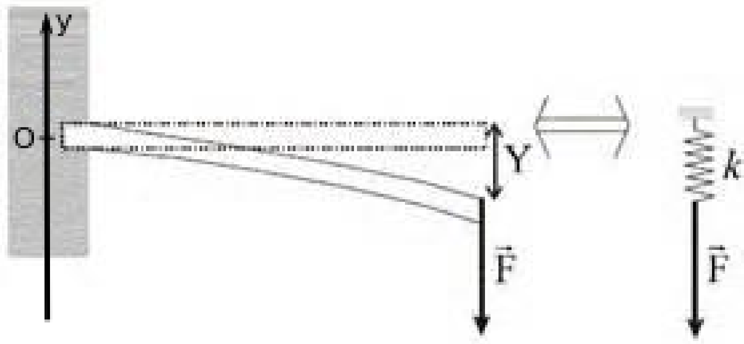
CALCULATRICES AUTORISÉES

Les trois exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

I. Un modèle d'élasticité d'une barre d'acier

L'acier est un des matériaux les plus employés (construction mécanique, béton armé). C'est un matériau dur et doté de propriétés mécaniques intéressantes, constitué d'un alliage de fer, de carbone et de divers additifs (potassium, manganèse, chrome...) qui vont permettre de faire varier ses caractéristiques. En particulier, on peut le déformer (dans certaines limites) et il peut retrouver sa forme initiale quand on supprime la contrainte exercée : on parle d'*élasticité*. Le sujet porte sur une méthode expérimentale permettant d'accéder aux caractéristiques d'une tige d'acier de longueur L et de section circulaire de diamètre d fixé. La masse volumique de l'acier considéré est $\rho = 7,5.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$.

La tige de longueur L et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la tige est horizontale (on néglige son poids dans tout le problème). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la tige, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche (figure ci-contre).



La flèche Y est donnée par la relation algébrique suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) :

$$Y = \frac{7L^3 F}{Ed^4}$$

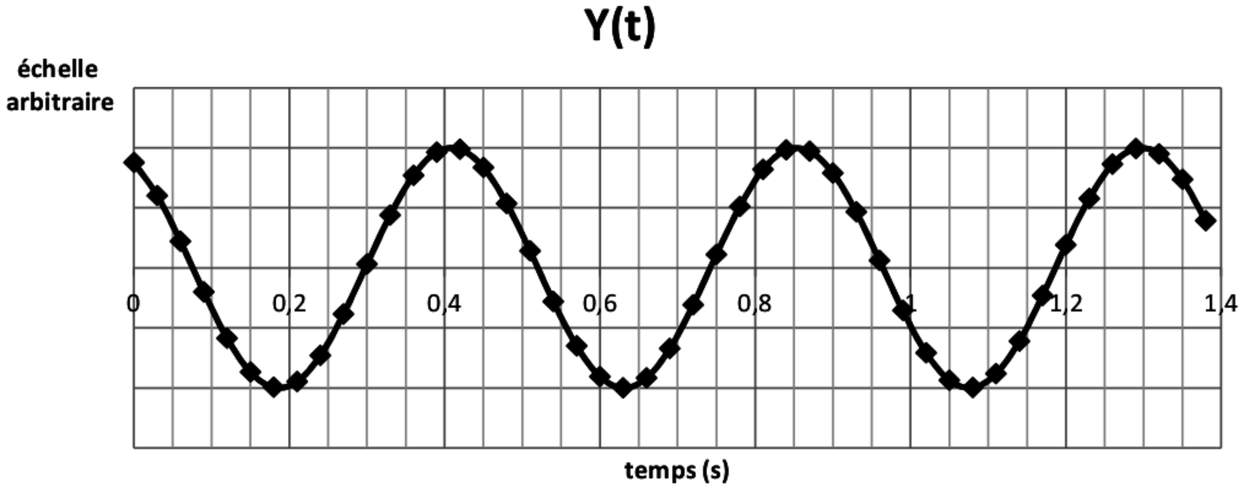
où E est une grandeur caractéristique du matériau, nommée *module d'Young*. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young de l'acier : $E = 2,1.10^{11}$ SI. Dans l'ensemble du sujet, on négligera tout phénomène d'amortissement.

1. Quelle est la dimension du module d'Young E ? Quelle est son unité SI ?
2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la tige d'acier par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et L.
3. Calculer numériquement k pour une tige de longueur $L = 1,0\,\mathrm{m}$ et de diamètre $d = 1,0\,\mathrm{cm}$.

On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsqu'une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. On opère dans des conditions telles que l'analogie au ressort reste valide. La position de l'extrémité de la tige vaut $Y(t)$ à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la tige, l'énergie cinétique de cette tige d'acier est donnée par l'expression :

$$E_c = \rho L d^2 \dot{Y}^2$$

4. a) Lorsque la barre est déformée avec une flèche Y, elle aquiert une énergie potentielle élastique $E_{p_{\mathrm{el}}}$. Proposer une expression pour $E_{p_{\mathrm{el}}}$.
   b) Ecrire l'expression de l'énergie mécanique de la tige en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.
   c) Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la tige.
   d) En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 du mouvement de la barre, puis donner la forme générale de la solution $Y(t)$ de cette équation différentielle.
   e) On suppose que la barre est lâchée à l'instant initial $t = 0$ sans vitesse et avec une flèche Y_m. Expliciter la loi horaire $Y(t)$.
5. Quelle est l'expression de la fréquence propre f_0 de vibration d'une tige d'acier de module d'Young E, de longueur L et de diamètre d ?
   Calculer numériquement sa valeur pour une tige d'acier de longueur $L = 1,00\,\mathrm{m}$ et diamètre $d = 1,0\,\mathrm{cm}$.
6. A partir d'une observation du mouvement de la tige au moyen d'une caméra numérique, on extrait l'évolution de la flèche $Y(t)$, pour la tige de la question précédente. En exploitant le graphe ci-dessous, évaluer précisément la période $T_{0\,\mathrm{exp}}$ des oscillations et en déduire une valeur expérimentale pour le module d'Young.



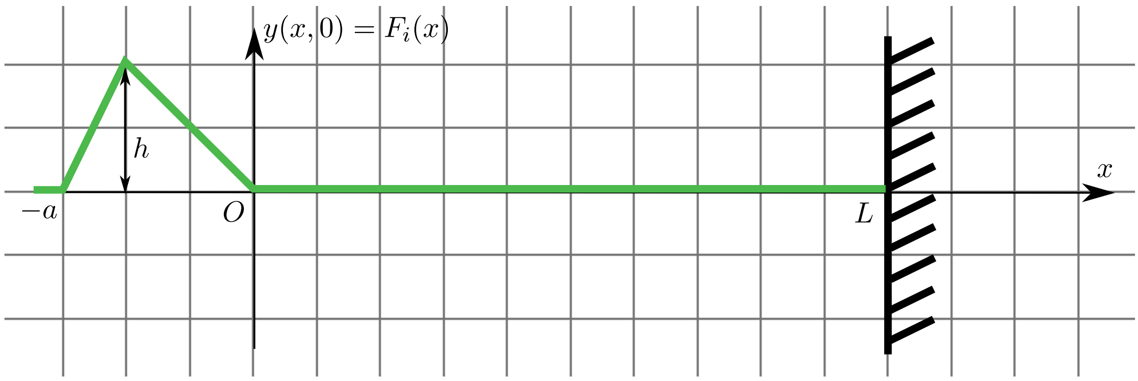
7. On interface le système en fixant un capteur d'accélération à l'extrémité de la tige, qui va délivrer une tension électrique proportionnelle à l'accélération subie. On note m_c la masse de ce capteur.
   a) Comment sont modifiées les expressions des énergies cinétique et potentielle du système par la présence du capteur (on pourra approximer le mouvement du capteur par un mouvement rectiligne) ? On pourra utiliser k et poser $m = 2\rho L d^2$ pour simplifier l'expression.
   b) En déduire la nouvelle équation du mouvement.
   Le capteur a-t-il une incidence sur la position moyenne de la barre, et sur la fréquence de vibration ? Si oui, on précisera laquelle dans chaque cas.
8. L'incidence de la masse m_c est supposée négligeable. On veut déterminer expérimentalement la dépendance de la fréquence de vibration vis à vis de la longueur L de la tige. f est supposée dépendre de L via un exposant n selon : $f = \alpha\, L^n$ où α est une constante que l'on ne cherchera pas à expliciter.
   En explicitant la démarche, proposer une valeur de n à partir des mesures suivantes, relevées pour différentes valeurs de la longueur L de la tige. Commenter le résultat obtenu.
   Indication : penser aux logarithmes...

L (m)	0,50	0,80	1,00	1,30	1,50
f (Hz)	9,00	3,52	2,25	1,33	1,00

II. Propagation d'une déformation sur une corde vibrante

Une corde élastique est tendue le long de l'axe Ox et fixée à un mur à l'abscisse $x = L$. On suppose que sa position de repos correspond à l'axe Ox. On notera par la suite $y(x,t)$ l'écart de la corde à cette position de repos, à l'abscisse x et à l'instant t. Une onde progressive incidente se propage vers la droite sans déformation ni atténuation sur cette corde. La corde est tendue de telle sorte que la célérité des ondes soit c supposée connue. A l'instant de référence $t = 0$, l'allure de la corde est représentée sur la figure ci-dessous par la fonction $y(x,0) = F_i(x)$, avec

$$F_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -a \\ \frac{3h}{a}\,(x+a) & \text{si} \quad -a < x \leq -2a/3 \\ -\frac{3h}{2a}\,x & \text{si} \quad -2a/3 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



Corde à l'instant $t = 0$.

1. Exprimer l'instant t_r auquel l'onde rencontre le mur.
2. Exprimer la perturbation $y(x,t)$ de la corde en fonction de F_i, x et t (et des données du problème), pour un instant $t < t_r$.
3. Sur le document annexe (à rendre avec votre copie), représenter la corde à l'instant $t_1 = \frac{L}{2c}$.
4. Exprimer le signal temporel $y(\frac{L}{2}, t)$ vu par un observateur situé en $x = \frac{L}{2}$. Représenter graphiquement ce signal sur votre copie. On indiquera clairement les instants remarquables sur l'axe des temps.
5. Expliquer pourquoi il apparaît nécessairement une onde réflechie lorsque l'onde incidente arrive sur le mur.
6. Bien que cette onde réfléchie n'existe en réalité pas à la date $t = 0$, on peut imaginer qu'elle est alors derrière le mur. On peut donc aussi la décrire de façon hypothétique à l'instant $t = 0$ par la fonction $y_r(x,0) = F_r(x)$.
   a) Exprimer alors l'onde réfléchie $y_r(x,t)$ à l'instant $t > t_r$ en fonction de F_r.
   b) En déduire l'onde totale $y(x,t)$ formée par la superposition des ondes incidente et réfléchie, à l'aide des fonctions F_i et F_r, pour $t > t_r$.
7. Dans la suite on se place toujours à un instant $t \geq t_r$.
   a) Exprimer la condition à la limite en $x = L$ vérifiée par les fonctions F_i et F_r.
   b) En déduire l'expression de l'onde réfléchie $y_r(x,t)$ puis celle de l'onde totale $y(x,t)$, uniquement en fonction de F_i.
8. a) En utilisant l'expression de l'onde totale $y(x,t)$ en fonction de F_i, construire sur le document annexe la forme de la corde à l'instant $t_2 = \frac{L+2a/3}{c}$. On pourra raisonner à l'aide d'opérations de symétries. On justifiera clairement.
   b) Même question pour l'instant $t_3 = \frac{3L}{2c}$.

* * * Tourner SVP * * *

III. Vibration d'une goutte d'eau

Une goutte d'eau est en équilibre sur une surface. Une petite perturbation (ex : choc sur le support) génère des vibrations de la surface de la goutte, qui s'effectuent à une fréquence préférentielle que l'on pourrait appeler fréquence propre.

La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres. On supposera que la *tension superficielle*[1] est le facteur prédominant dans la cohésion de la goutte. Par conséquent, les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f seront :

- R, le rayon de la goutte ;
- ρ, la masse volumique, pour tenir compte de l'inertie ;
- σ, la constante intervenant dans l'expression des forces de tension superficielle (la dimension de σ est celle d'une force par unité de longueur, ou d'une énergie par unité de surface).

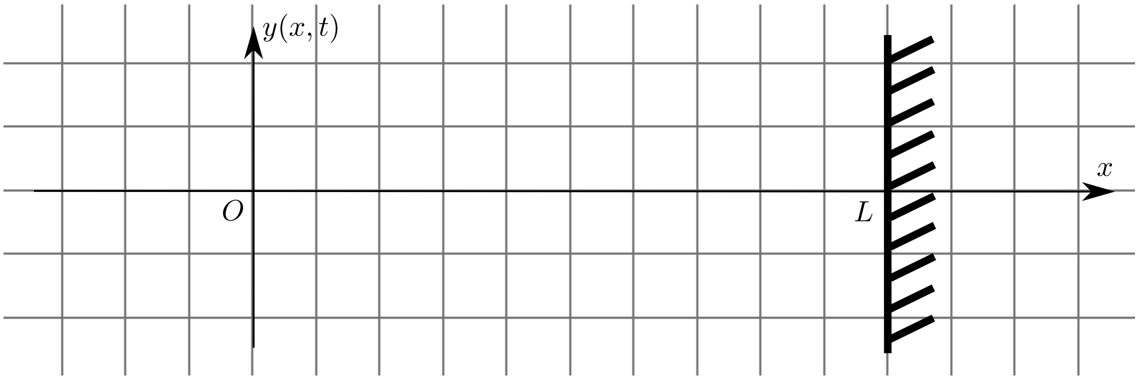
Proposer une loi donnant f en fonction de ces trois grandeurs physiques.

* * * Fin de l'épreuve * * *
(pensez à rendre votre annexe avec votre NOM et Prénom)

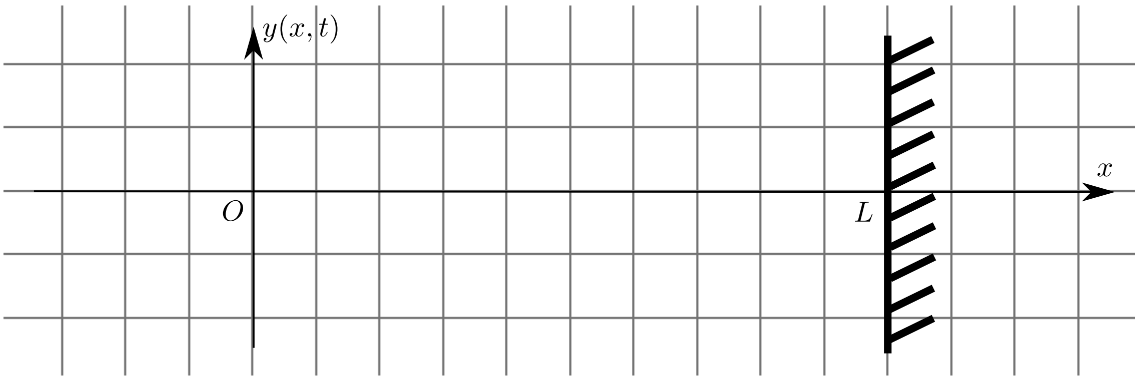
1. Les forces de tension superficielle sont des forces agissant au niveau des interfaces entre milieux matériels (liquide-solide, liquide-gaz, liquide-liquide...). Elles sont notamment responsables de la formation de ménisques, et contrôlent la forme des gouttes et la propension au mouillage des surfaces.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

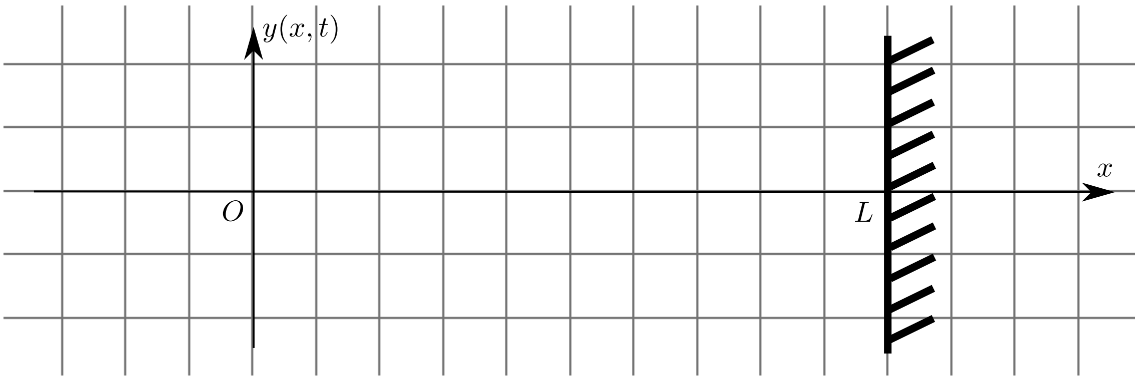
NOM : Prénom :



Corde à l'instant $t = t_1 = \frac{L}{2c}$**.**



Corde à l'instant $t = t_2 = \frac{L+2a/3}{c}$**.**



Corde à l'instant $t = t_3 = \frac{3L}{2c}$**.**