

THERMODYNAMIQUE - Premier Principe

I. Préparation d'une bouteille d'air comprimé

1. D'après le théorème d'équipartition de l'énergie (valable en mécanique classique), chaque terme quadratique de l'énergie microscopique d'une molécule vaut $\frac{1}{2}k_B T$. L'air peut être assimilé à un gaz parfait diatomique à 99%. Le gaz étant parfait, il n'y a pas d'énergie potentielle intermoléculaire. De plus il y a 7 termes quadratiques dans l'énergie d'une molécule mais le degré de liberté de vibration est gelé à température ambiante, donc il n'en reste que 5 effectifs. L'énergie interne vaut donc $U = N \langle E_{c_{\text{micro}}} \rangle = \frac{5}{2} N k_B T = \frac{5}{2} n R T$. Ainsi la capacité thermique vaut $C_v = \frac{5}{2} n R$. D'après la

relation de Mayer pour les gaz parfaits, $C_p = C_v + nR$, donc $C_p = \frac{7}{2} nR$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,40$.

2. On considère le système global constitué d'une part de l'air contenu dans la petite bouteille (n_0 avant ouverture du robinet, et n après fermeture) et d'autre part de l'air contenu dans la grande bouteille (n_g avant ouverture du robinet, et n'_g après fermeture). La conservation de la matière s'écrit $n_0 + n_g = n + n'_g$. Combinée à l'équation d'état des gaz parfait on obtient $(n_0 + n_g)RT_0 = (n + n'_g)RT_0 \iff p_0 V_p + p_g V_g =$

$p_F (V_p + V_g)$. D'où la pression finale $p_F = \frac{p_0 V_p + p_g V_g}{V_p + V_g} = \underline{195 \text{ bar}}$, et la quantité dans la petite bouteille

$$n = \frac{p_F V_p}{RT_0} = \underline{3,20 \text{ mol.}}$$

3. a) La transformation est brutale, on ne peut considérer qu'elle est proche d'une succession d'états d'équilibres, donc **elle n'est pas quasi-statique**.

b) Système : les n moles d'air présentes dans la petite bouteille à la fin de l'opération, et occupant un volume V avant l'ouverture. Le Premier Principe (PP) s'écrit $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_F - T_0) = W = p_g V$, or $p_g V = nRT_0$. On en déduit $T_F = \gamma T_0 = \underline{410,2 \text{ K}}$.

c) Ceci conduit à $n = \frac{p_g V_p}{RT_F} = 2,35 \text{ mol}$. L'échauffement réduit donc nettement la quantité d'air stockée par rapport au cas isotherme.

4. a) Le système est toujours constitué des n' moles d'air contenues la petite bouteille à la fin du remplissage. On note n_0 les moles d'air contenues initialement dans la petite bouteille. Le PP s'écrit maintenant : $\Delta U = \frac{n'R}{\gamma-1} (T_F - T_0) = p_g V' = (n' - n_0)RT_0$, que l'on ré-écrit $n'RT_F = \gamma n'RT_0 - (\gamma-1)n_0RT_0$.

En injectant l'état final $p_g V_p = n'RT_F$ on obtient $p_g V_p \left(1 - \gamma \frac{T_0}{T_F}\right) = -(\gamma-1)p_0 V_p$, ce qui conduit

$$\text{à } T_F' = \gamma T_0 \left(1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_g}\right)^{-1} = \underline{409,4 \text{ K.}}$$

b) On a bien $T_F' \rightarrow \gamma T_0 = T_F$ lorsque $\frac{p_0}{p_g} \rightarrow 0$. Il y a heureusement continuité entre les deux calculs.

c) L'écart relatif entre les deux résultats est $\frac{T_F' - T_F}{T_F} = \frac{T_F' - T_F}{\gamma T_0} - 1 = \left(1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_g}\right)^{-1} - 1 \approx -(\gamma-1) \frac{p_0}{p_g} = -2 \times 10^{-3} = \underline{-0,2\%}$. C'est relativement faible compte-tenu du peu de précision requis ici.

5. a) PP appliqué au système global : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = W + Q = 0 + 0$ car les parois de l'enceinte globale sont rigides, et la transformation est adiabatique. Ceci conduit à $n_1 R(T_1 - T_0) + n_2 R(T_2 - T_0) = 0$ d'où $n_1 T_1 + n_2 T_2 = (n_1 + n_2)T_0$.

b) En considérant l'équation précédente et le fait que $p_1 = p_2 = p_F$ (équilibre mécanique), il manque 4 équations pour trouver les 5 inconnues (n_1, T_1, n_2, T_2, p_F).

En injectant les deux équations d'états finals $p_F V_p = n_1 R T_1$ et $p_F V_g = n_2 R T_2$ et la conservation de la matière au cours de la transformation, $n_1 + n_2 = (p_0 V_p + p_g V_g)/(RT_0)$ dans l'équation du 5.a), on obtient $p_F (V_p + V_g) = p_0 V_p + p_g V_g$. Ceci conduit au même résultat qu'en 2. :

$$p_1 = p_2 = p_F = \frac{p_0 V_p + p_g V_g}{V_p + V_g} = \underline{195 \text{ bar.}}$$

La 5ème équation est le PP pour l'un des deux sous-systèmes. La pression dans la grande bouteille n'étant plus constante on ne peut pas appliquer la méthode précédente. Par contre sous l'hypothèse d'une transformation adiabatique quasi-statique du système n_2 , on peut appliquer la loi de Laplace (version intégrée du PP) : $p_F^{1-\gamma} T_2^\gamma = \text{constante} = p_g^{1-\gamma} T_0^\gamma$. Ceci donne $T_2 = T_0 \left(\frac{p_g}{p_F}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, et

$n_2 = \frac{p_F V_g}{RT_2} = \frac{p_F V_g}{RT_0} \left(\frac{p_g}{p_F}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$. Par conservation de la matière on obtient $n_1 = (p_0 V_p + p_g V_g)/(RT_0) - n_2$,

d'où après reformulation : $n_1 = \frac{p_F}{RT_0} \left(V_p + V_g - V_g \left(\frac{p_g}{p_F}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) = \underline{2,30 \text{ mol.}}$

Finalement on en déduit $T_1 = \frac{p_F V_p}{n_1 R}$, d'où $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(\frac{p_g}{p_F}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} = \underline{407,8 \text{ K.}}$

- c) On souhaite retrouver le résultat du 4. en faisant $\frac{V_p}{V_g} \rightarrow 0$. En réinjectant l'expression de p_F on obtient :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(\frac{1 + \frac{V_p}{V_g}}{1 + \frac{p_0 V_p}{p_g V_g}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} \approx T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(1 + \frac{V_p}{V_g} \left(1 - \frac{p_0}{p_g}\right)\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} \\ &\approx T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(1 + \frac{V_p}{V_g} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left(1 - \frac{p_0}{p_g}\right)\right)\right)^{-1} = T_0 \left(1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \left(1 - \frac{p_0}{p_g}\right)\right)^{-1} \\ &= \gamma T_0 \left(1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_g}\right)^{-1} = T_F' \end{aligned}$$

- d) On obtient un écart relatif $\frac{T_1}{T_F} - 1 = \underline{-0,4\%}$

II. Etude de compresseurs

II.1. Compresseur à un étage

- Les transformations sont toutes quasi-statiques, donc l'équilibre mécanique est toujours établi de part et d'autre du piston. En notant s la section du cylindre, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué au piston dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit donc $0 = p_0 s - p_0 s + F_{\text{op}}$. Donc $F_{\text{op}} = 0$, et donc $\boxed{W_1 = 0}$.
 - Il s'agit d'une compression adiabatique du système constitué des n moles d'air aspirées, donc $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0) = W + Q = W = -p_0 (V_1 - V_M) + W_2$, le premier terme de travail étant fourni par l'atmosphère à droite du piston. D'autre part, $p_0 V_M = nRT_0$ et $p_f V_1 = nRT_f$ donc on obtient $\boxed{W_2 = \frac{p_f V_1 - p_0 V_M}{\gamma - 1} + p_0 (V_1 - V_M)}$.
 - De nouveau on suppose que la somme des forces appliquées au piston est nulle à tout instant, d'où $F_{\text{op}} = p_f - p_0$, ce qui conduit à un travail $\boxed{W_3 = (p_f - p_0) V_1}$.
- La compression de la phase 2 est adiabatique et quasi-statique donc le gaz étant parfait elle obéit à la loi de Laplace : $\boxed{V_1 = V_M \left(\frac{p_0}{p_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}$.
- On obtient $W_{\text{op}} = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{p_f V_1 - p_0 V_M}{\gamma - 1} + p_f V_1 - p_0 V_M = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_f V_1 - p_0 V_M)$. On observe que le travail global de l'atmosphère sur un aller-retour est nul. En remplaçant V_1 , on obtient

$$\boxed{W_{\text{op}} = \frac{\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_f}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right) = 409 \text{ J.}}$$

II.2. Compresseur à deux étages

- Le travail fourni par l'opérateur dans le premier cylindre correspond à celui calculé précédemment en p_f en p_1 : $\frac{\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$.
Quant à celui fourni dans le second cylindre, on le calcule selon le même raisonnement (on note V_1''' le volume lorsque la soupape d'échappement s'ouvre) :

$$-(p_1 - p_0) V_1'' + \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_0) - p_0 (V_1'' - V_1''') + (p_f - p_0) V_1''' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_f V_1''' - p_0 V_1'') = \frac{\gamma nRT_0}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_f}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Il obéit donc aussi au même type de loi. Comme $nRT_0 = p_0 V_M$, on obtient finalement

$$\boxed{W_{\text{op}2} = \frac{\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} + \left(\frac{p_f}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 2 \right)}$$

- Les pressions p_0 et p_f étant fixées, on trouve après dérivation que $W_{\text{op}2}$ est minimal pour $\boxed{p_1 = \sqrt{p_0 p_f}} = 3,87 \times 10^5 \text{ Pa}$.

- Les taux de compression valent alors $\boxed{\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_f}{p_0} = \sqrt{\frac{p_f}{p_0}}} = 3,87$.

- On obtient alors $\boxed{W_{\text{op}2} = \frac{2\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_f}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) = 331 \text{ J} < W_{\text{op}}$. Ainsi, l'introduction d'un échangeur et d'un second étage permet d'améliorer l'efficacité du dispositif, car il requiert un travail plus faible pour l'opérateur. On devine qu'on peut encore améliorer le rendement en ajoutant d'autres étages.