# Mouvement d'une plaque sur un ou deux cylindres

**1. a)** Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) dans $\mathcal{R}$ pour la plaque s'écrit $m\,\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{N}' + \vec{T}'$. Par projection selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ ceci conduit, avec des notations algébriques pour les forces de contact, à

$$\boxed{m\,\ddot{x} = T + T'} \tag{1}$$

$$\boxed{0 = -mg + N + N'} \tag{2}$$

**b)** Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) dans $\mathcal{R}^*$ en $G$ pour la plaque s'écrit $\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^G}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}^G_{\text{ext}}$. L'ensemble des forces et le mouvement sont dans le plan $Oxz$ donc le TMC peut s'écrire de façon scalaire uniquement selon l'axe orthogonal $Oy$. La plaque ne tourne pas tant qu'elle est au contact des deux rouleaux, donc le moment cinétique est nul. Les forces de réaction tangentielles $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ ont leur support qui passe par $G$ donc leur moment en $G$ est nul. Le moment résultant des forces de pesanteur est égal au moment de la résultante des forces de pesanteur. Or celle-ci passe par $G$, donc $\vec{\mathcal{M}}^G_{m\vec{g}} = \vec{0}$. Il reste uniquement le moment des réactions normales, ce qui conduit à

$$\boxed{0 = N\,x - N'\,(a - x)} \tag{3}$$

Etant donné que $N > 0$ et $N' > 0$, on vérifie bien que les rouleaux $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ appliquent respectivement des moments selon $\vec{u}_y$ (sens positif) et selon $-\vec{u}_y$.

**c)** La vitesse de glissement sur $\mathcal{C}$ à l'instant $t$ est la différence, au point de contact, entre la vitesse du point coïncident de la plaque et la vitesse du point coïncident du rouleau : $\boxed{\vec{v}_{g\,\mathcal{C}} = (\dot{x} - b\omega)\,\vec{u}_x}$.

A l'instant initial, $\dot{x}(t = 0) = 0$ donc $\vec{v}_{g\,\mathcal{C}} = -b\omega\,\vec{u}_x \neq \vec{0}$. **La plaque glisse sur le cylindre**.

**d)** Les trois équations dynamiques ci-dessus dépendent de $x(t)$ et de 4 forces de contact inconnues. On a donc besoin de deux équations scalaires supplémentaires, qui sont fournies par la loi de Coulomb du frottement solide. Comme il y a glissement sur $\mathcal{C}$ au début du mouvement et que $\vec{T}$ doit être opposée au glissement, on a

$$\boxed{T = f\,N} \tag{4}$$

D'autre part il n'y a pas de frottement sur $\mathcal{B}$, donc

$$\boxed{T' = 0} \tag{5}$$

*On peut maintenant éliminer les forces de contact pour trouver l'équation du mouvement.*
Les Eqs. (2) et (3) conduisent à $N = mg\,\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, qui réinjecté dans les Eqs. (4) et (1) conduisent à

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\,x = fg \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{f\,\frac{g}{a}}}$$

**e)** Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0$. Le second membre constant correspond à une position moyenne $fg/\omega_0^2 = a$. La solution est donc du type $x(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t) + a$. D'après les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient

$$\boxed{x(t) = a\,(1 - \cos(\omega_0 t))}$$

**f)** Le mouvement se poursuit ainsi à la condition qu'il y ait toujours glissement (et dans le même sens), c'est-à-dire : $\dot{x} - b\omega = a\omega_0\,\sin(\omega_0 t) - b\omega < a\omega_0 - b\omega < 0$, donc $a\omega_0 < b\omega$ ou $\boxed{a < \dfrac{b^2\omega^2}{fg}}$.

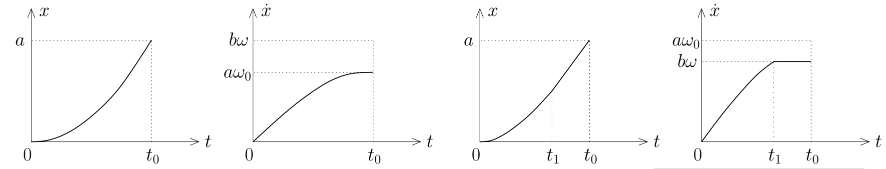
La plaque quitte alors le cylindre $\mathcal{C}$ quand elle atteint $x = a$, c'est-à-dire à l'instant $\boxed{t_0 = T_0/4 = \dfrac{\pi}{2\omega_0}}$.





Ceci conduit aux graphes ci-dessous (gauche).

$a < b^2\omega^2/(fg)$    $a > b^2\omega^2/(fg)$




Si au contraire $a > b^2\omega^2/(fg)$, alors à l'instant $t_1$ tel que $\dot{x}(t_1) = b\omega$, soit $\boxed{t_1 = \dfrac{1}{\omega_0}\ \arcsin\left(\dfrac{b\omega}{a\omega_0}\right)}$, **le glissement cesse**. On alors $\dot{x} = b\omega$ donc un mouvement uniforme qui conduit à

$$\boxed{x(t) = b\omega\,(t - t_1) + x(t_1)}.$$

Ce mouvement sans glissement existe à condition que $|T| = -T < fN$, ce qui donne en remplaçant par les relations précédentes : $-T = -m\ddot{x} = 0 < fN = fmg\,\left(1 - \frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow x < a$. **Donc ce mouvement sans glisssement persiste jusqu'à la chute en** $x = a$ à l'instant $t_0$ tel que $a = b\omega\,(t_0 - t_1) + x(t_1)$, soit $\boxed{t_0 = t_1 + \dfrac{a}{b\omega}\ \cos(\omega_0 t_1)}$. On obtient alors le graphe ci-dessus (droite).

**g)** La condition sur $a$ ci-dessus se ré-écrit sous la forme d'une condition sur $\omega$ : si $\boxed{\omega > \omega_c = \sqrt{fga}/b} = \underline{8,9\,\text{rad.s}^{-1}}$ on est dans la première situation, sinon dans la seconde.
i) $\omega > \omega_c$, donc on est dans la première situation. **La plaque quitte $\mathcal{C}$ à l'instant** $\underline{t_0 = 0,35\,\text{s}}$. ii) $\omega < \omega_c$, donc on est dans la seconde situation. La plaque cesse de glisser à l'instant $\underline{t_1 = 0,14\,\text{s}}$, puis **quitte $\mathcal{C}$ à l'instant** $\underline{t_0 = 0,47\,\text{s}}$.

**2. a)** Les Eqs. (1) à (4) restent valables, et on modifie l'Eq. (5) par

$$\boxed{T' = -f\,N'} \tag{6}$$

Puis on élimine les forces de contact comme précédemment : $m\ddot{x} = T + T' = f\,(N - N') = f\,(1 - \frac{x}{a-x})\,N = fmg\,(1 - \frac{2x}{a})$, d'où

$$\boxed{\ddot{x} + 2\omega_0^2\,x = fg}$$

**b)** Cette fois la plaque oscille autour de la solution particulière $\frac{a}{2}$. Les conditions initiales conduisent à

$$\boxed{x(t) = \frac{a}{2} + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{2}\omega_0}\ \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}$$

Ce mouvement perdure tant que la condition de glissement est vérifiée, c'est-à-dire tant que $|\dot{x}| < b\omega$. Or $\dot{x} = \dot{x}(0)\,\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)$ donc comme $|\dot{x}(0)| < b\omega$, **la condition de glissement est toujours vérifiée.**

**c)** La mesure de la période $T = 2\pi\,\sqrt{\frac{a}{2fg}}$ des oscillations de la plaque donne accès à $f$ : $\boxed{f = \dfrac{2\pi^2 a}{gT^2}}$.