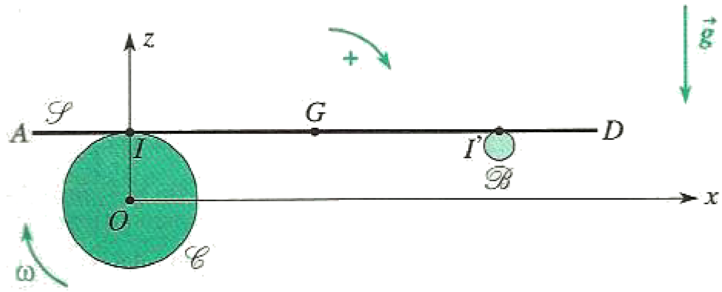
Mouvement d'une plaque sur un ou deux cylindres

On considère une plaque homogène carrée $\mathcal{S}$ de masse m, de côté $2a$, d'épaisseur négligeable, de sommets A, A', D', D, et de centre d"inertie G. Les mouvements de cette plaque sont étudiés dans un référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le champ de pesanteur a une intensité notée g. Pour les applications numériques on prendra $a = 0,2\,\text{m}$ et $g = 9,8\,\text{m.s}^{-2}$.



1. La plaque $\mathcal{S}$ est posée sans vitesse initiale sur une barre $\mathcal{B}$ et sur un cylindre $\mathcal{C}$ de rayon b. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont des axes parallèles, horizontaux, de telle sorte que la plaque soit horizontale ; le côté AA' restant parallèle à ces axes.
Le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire $\omega > 0$. Le contact entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ est sans frottements, alors que celui entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f.
On prendra $II' = a$, $IG = x$ avec $x(t = 0) = 0$, $b = 0,1\,\text{m}$ et $f = 0,4$.

- **a)** Appliquer et projeter le théorème de la résultante cinétique (TRC) pour la plaque dans $\mathcal{R}$. On notera respectivement (N, T) et (N', T') les composantes des forces de contact exercées par les rouleaux.
- **b)** Appliquer et projeter le théorème du moment cinétique scalaire en G dans le référentiel barycentrique (on admet que cela s'écrit comme dans $\mathcal{R}$, si ce n'est que G peut être considéré fixe).
- **c)** La plaque glisse-t-elle sur le rouleau au début ?
- **d)** En déduire l'équation du mouvement en $x(t)$.
- **e)** Résoudre cette équation et donner la loi horaire $x(t)$.
- **f)** A quelle condition sur a ce mouvement se poursuit-il tel quel ? Sinon qu'advient-il ? On tracera l'allure de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ dans chaque cas.
- **g)** Dans les deux cas suivants,

$$i)\ \omega = 15\,\text{rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad ii)\ \omega = 5\,\text{rad.s}^{-1}\,,$$

  la plaque va-t-elle quitter le cylindre $\mathcal{C}$ et si oui à quelle date ?

2. La barre $\mathcal{B}$ est maintenant remplacée par un cylindre $\mathcal{C}'$ identique à $\mathcal{C}$, tournant à la même vitesse mais en sens inverse. A l'instant initial $t = 0$ on place la plaque avec les conditions suivantes : $x(0) = \frac{a}{2}$ et $0 < \dot{x}(0) < b\omega$.

- **a)** Etablir la nouvelle équation du mouvement.
- **b)** En déduire la loi horaire $x(t)$.
- **c)** Montrer comment cette expérience permet de déterminer le coefficient f.