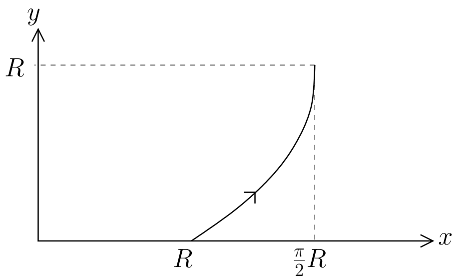
Mouvement d'une masse glissant sur un cylindre

1. On intègre deux fois l'accélération, qui est constante : $\boxed{\overrightarrow{OO'}(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2\,\vec{e}_x}$.
2. Par conservation de la longueur du fil (inextensible), on a $\overline{OO'} = R\theta$, d'où $\boxed{\theta = \frac{a_0}{2R}t^2}$.
3. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + R\,\vec{e}_r$, d'où $\boxed{x = R\theta + R\cos\theta}$ et $\boxed{y = R\sin\theta}$.
4. $x(\theta)$ et $y(\theta)$ sont des fonctions croissantes de θ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et $\theta(t)$ croît avec t de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Au départ, M a pour coordonnées $(x = R, y = 0)$. En $\theta = \frac{\pi}{2}$, M a pour coordonnées $(x = R\frac{\pi}{2}, y = R)$. La tangente à la courbe est donnée par le vecteur vitesse si celui-ci n'est pas nul. On l'obtient dans la base cartésienne en dérivant x et y par rapport au temps : $\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\,[(1-\sin\theta)\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y]}$. On obtient que en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_y$ donc **la tangente à la trajectoire est verticale**. En $\theta = 0$ la vitesse est nulle. Toutefois on peut connaître sa direction asymptotique en cherchant la limite de ses composantes : $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc **la tangente fait un angle de** $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'horizontale.
Remarque : Ce dernier résultat peut s'obtenir aussi en cherchant la valeur de l'accélération en $\theta = 0$, puisque c'est alors l'accélération qui détermine la direction de la vitesse qui va apparaître.



5. On dénombre trois forces agissant sur M dans $\mathcal{R}$:
   — Force de pesanteur $\boxed{m\vec{g} = -mg\,(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)}$.
   — Force de réaction du cylindre (normale au support puisqu'on néglige tout frottement) : $\boxed{\overrightarrow{N} = N\,\vec{e}_r}$.
   — Force de tension du fil (tangente au fil au point d'accroche) : $\boxed{\overrightarrow{T} = T\,\vec{e}_\theta}$.
   Remarque : les deux dernières forces sont a priori inconnues. Elles seront déduites du PFD.
6. On a (faire un dessin) : $\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$.
   On redérive la vitesse dans la base cartésienne, ce qui mène à $\vec{a} = R\,[\ddot{\theta}(1-\sin\theta) - \dot{\theta}^2\cos\theta]\,\vec{e}_x + R\,[\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\sin\theta]\,\vec{e}_y$. Après passage dans la base polaire puis simplification, on obtient
$$\boxed{\vec{a} = R\,(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + R\,\ddot{\theta}(1-\sin\theta)\,\vec{e}_\theta}.$$
   Comme $\theta = \frac{a_0}{2R}t^2$, on a $R\dot{\theta}^2 = 2a_0\theta$ et $R\ddot{\theta} = a_0$, d'où $\boxed{\vec{a} = a_0(\cos\theta - 2\theta)\,\vec{e}_r + a_0(1-\sin\theta)\,\vec{e}_\theta}$.
7. Le PFD s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$. En projection selon $\vec{e}_r$ puis selon $\vec{e}_\theta$, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} ma_0(\cos\theta - 2\theta) & = & -mg\sin\theta + N \\ ma_0(1-\sin\theta) & = & -mg\cos\theta + T \end{array}\right.$$
   On en déduit $\boxed{N = ma_0(\cos\theta - 2\theta) + mg\sin\theta}$ et $\boxed{T = ma_0(1-\sin\theta) + mg\cos\theta}$.

8. Le mobile décolle si et seulement si la réaction N s'annule, donc si il existe une position $\theta_d \in]0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant
$$\boxed{f(\theta_d) = \cos\theta_d - 2\theta_d + \frac{g}{a_0}\sin\theta_d = 0}$$
   On étudie rapidement la fonction $f(\theta)$. Sa dérivée $f'(\theta) = -\sin\theta + \frac{g}{a_0}\cos\theta - 2$ est décroissante, continue et vérifie $f'(\frac{\pi}{2}) = -3$. Donc $f'(\theta)$ est forcément négative au-delà d'un certain $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et positive avant. Donc $f(\theta)$ est forcément décroissante au-delà de θ_0 et croissante avant. Comme $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{g}{a_0} - \pi$, on en déduit que $f(\theta)$ s'annule si et seulement si $\frac{g}{a_0} - \pi < 0$. En conclusion, **le mobile ne décolle pas si et seulement si** $\boxed{a_0 \leq \frac{g}{\pi}}$. On remarque que l'accélération ne doit pas être trop forte, ce à quoi on pouvait s'attendre.