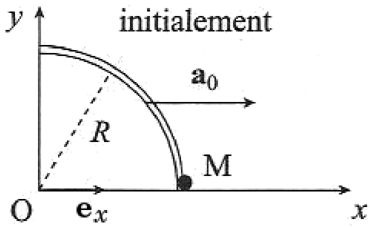
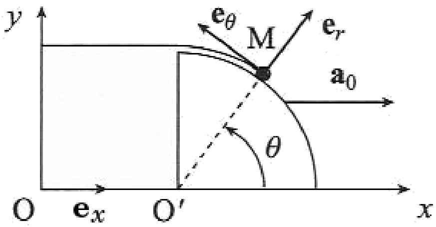
Mouvement d'une masse glissant sur un cylindre

Un quart de cylindre de rayon R et de centre O', initialement immobile contre le mur Oy, se déplace avec une accélération constante par rapport au sol : $\vec{a}_0 = a_0\,\vec{e}_x$ (cf figure ci-dessous, où les vecteurs sont représentés en gras).





Un fil inextensible repose en partie sur le cylindre, une extrémité étant fixée au mur et l'autre extrémité reliée à un point matériel M. M est initialement en contact avec le sol. On suppose tout d'abord qu'au cours du mouvement, le point M ne décolle pas du cylindre. On étudie le mouvement dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1. Etablir la loi horaire du vecteur position de l'axe du cylindre $\overrightarrow{OO'}(t)$.
2. En déduire la la loi horaire $\theta(t)$.
3. Exprimer les coordonnées cartésiennes x et y de M en fonction de θ.
4. Tracer qualitativement, en la justifiant, la trajectoire de M dans le repère Oxy tant qu'il est en contact avec le cylindre (c'est-à-dire pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$). On indiquera clairement les coordonnées du point de départ et du point "d'arrivée", et on justifiera la direction de la tangente à la trajectoire en ces deux points.

On cherche maintenant à déterminer à quelle condition le point M atteint effectivement $\theta = \frac{\pi}{2}$ sans décoller avant du cylindre. On supposera que le mobile M est de masse m, et qu'il glisse sans frottement sur le cylindre. On note $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$ le champ de pesanteur terrestre. On considère $\mathcal{R}$ galiléen.

5. Faire le bilan des forces s'exerçant sur M. Décomposer ces forces sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (base polaire dans le repère $O'xy$).
6. Exprimer la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En déduire l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Pour simplifier le calcul, on pourra exprimer $\vec{a}$ directement en fonction de θ et ses dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ plutôt qu'explicitement en fonction du temps.
   En utilisant l'expression de $\theta(t)$, montrer que son expression se réduit simplement à
   $$\vec{a} = a_0(\cos\theta - 2\theta)\,\vec{e}_r + a_0(1 - \sin\theta)\,\vec{e}_\theta\,.$$
7. Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) et le projeter sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En déduire l'expression des forces exercées par le cylindre et par le fil en fonction de θ.
8. Ecrire la condition de décollement du cylindre. Montrer que M ne décolle pas avant $\theta = \frac{\pi}{2}$ si le rapport $\frac{g}{a_0}$ vérifie une condition qu'on explicitera.