ÉLECTRICITÉ

I. Capacité commutée : simulation d'une résistance

1. a) Loi des mailles $E_1 = ri_1 + q/C$ avec $i_1 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ conduit à $\boxed{\tau \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = CE_1}$ avec $\boxed{\tau = rC}$.

   b) La solution générale s'écrit $q = CE_1 + A\,e^{-t/\tau}$. La continuité de la tension à $t = 0$ impose $A = Q_0 - CE_1$, d'où $\boxed{q = CE_1 + (Q_0 - CE_1)\,e^{-t/\tau}}$.

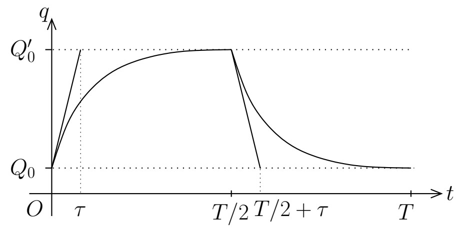
   c) On obtient $\boxed{Q'_0 = CE_1 + (Q_0 - CE_1)\,e^{-a}}$. Le régime permanent pour cette phase est CE_1. Comme $a = 5,0$, l'écart relatif est $\boxed{\frac{Q'_0 - CE_1}{CE_1} = (Q_0/CE_1 - 1)\,e^{-a}} \approx \underline{7\,10^{-3}\,(Q_0/CE_1 - 1) \ll 1}$. Donc on peut admettre que le régime permanent est atteint à mieux que 1% près : $\boxed{Q'_0 \approx CE_1}$.

2. a) De même on a maintenant $E_2 = ri_2 + q/C$ avec $i_2 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, d'où $\boxed{\tau \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = CE_2}$.

   b) De façon analogue on obtient $q = CE_2 + (Q'_0 - CE_2)\,e^{-t'/\tau} \approx \boxed{CE_2 + C(E_1 - E_2)\,e^{-t'/\tau}}$ avec $t' = t - \frac{T}{2}$.

   c) Par continuité et périodicité, $Q_0 = q(0) = q(T) = CE_2 + C(E_1 - E_2)\,e^{-a}$, donc $\boxed{Q_0 \approx CE_2}$.

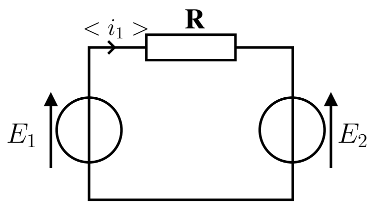
3. Pour le graphe, on note que $Q_0 = Q'_0/5$. Le condensateur oscille périodiquement entre deux états.



4. On note i le courant qui "descend" dans le condensateur, et i_1 et i_2 sont aussi orientés vers le condensateur.
$<i(t)>= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (q(T) - q(0))/T$. Donc $\boxed{<i(t)>= 0}$ par périodicité.
De même, $<i_1(t)>= \frac{1}{T}\int_0^T i_1 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (q(T/2) - q(0))/T = (Q'_0 - Q_0)/T$ d'où $\boxed{<i_1(t)>= C(E_1 - E_2)/T}$.
Enfin, $<i_2(t)>= \frac{1}{T}\int_0^T i_2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{T/2}^T \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (q(T) - q(T/2))/T = (Q_0 - Q'_0)/T$ d'où
$\boxed{<i_2(t)>= -<i_1(t)>= C(E_2 - E_1)/T}$.

5. On souhaite simuler le circuit ci-contre.
Ce circuit est parcouru par un courant $<i_1>= (E_1 - E_2)/R$.
Par identification avec le résultat précédent on en déduit

$$\boxed{R = \frac{T}{C}} = \underline{1,0\,\mathrm{k}\Omega}.$$



II. Circuit RLC série en régime libre

1. On oriente le courant en convention récepteur pour le condensateur. Loi des mailles : $u_c + ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$.
En injectant $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ on obtient $\boxed{\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{u}_c + \omega_0^2\,u_c = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{L/C}}$.

2. Pour $r = 0$ le régime est harmonique. La solution générale s'écrit $u_c = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$. La charge du condensateur et le courant sont continus donc $q_0/C = A$ et $i(0) = 0 = CB\omega_0$. D'où $\boxed{u_c(t) = q_0/C\,\cos(\omega_0 t)}$.
Ce signal oscille à la période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$.

3. a) Le régime oscille autour du régime permanent, donc c'est un régime $\underline{\text{pseudopériodique}}$. Le facteur de qualité vérifie $Q > \frac{1}{2}$, donc $\boxed{r < 2\sqrt{L/C}}$.

   b) La forme de la solution est $\boxed{u_c = D\,e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\,\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ (par résolution de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$). On détermine les constantes par les conditions initiales : $q_0/C = D\,\cos\varphi$ et $i(0)/C = -\frac{\omega_0}{2Q}\,\cos\varphi - \omega\,\sin\varphi = 0$. On en déduit $\tan\varphi = -\left(4Q^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ avec $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc $\boxed{\varphi = -\arctan\left(4Q^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}}$. D'autre part on obtient $\boxed{D = \frac{q_0}{C}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.
On peut aussi exprimer les choses autrement : $\boxed{u_c = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{\tau = 2Q/\omega_0}$, $\boxed{D = \frac{q_0}{C}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}}$, et $\boxed{\varphi = -\arctan\frac{1}{\tau\omega}}$.
Remarque : on peut aussi appliquer les conditions initiales en passant par la forme $u_c = e^{-\frac{t}{\tau}}\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$. *On obtient* $u_c = \frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}\,(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega}\sin(\omega t))$.

   c) Comme on observe un nombre relativement grand d'oscillations, on peut considérer que Q est "grand" et que les extrema sont localisés sur l'enveloppe exponentielle. Soit le maximum $t_{\max}$, on a donc $u_c(t_{\max}) \approx D\,e^{-\frac{t_{\max}}{\tau}}$ et le maximum suivant est approximativement en $t_{\max} + T$, avec $T = 2\pi/\omega$. Par définition $\delta = \ln\frac{u_c(t_{\max})}{u_c(t_{\max} + T)}$, ce qui conduit d'après ce qui précède à $\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\pi}{Q}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

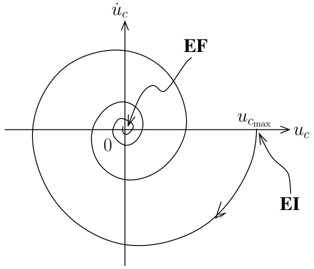
4. a) On mesure la pseudopériode par l'écartement des zéros de la solution de l'équation homogène, espacés de $T/2$, c'est-à-dire les points où u_c croise le régime permanent. Ici il s'agit de la valeur 0. On compte 10 zéros en 9 µs, donc $\underline{T = 2\,\mu\mathrm{s}}$.

   b) *Il n'est pas très prudent d'utiliser le point en $t = 0$ car on n'est pas certain que ce soit vraiment un maximum.* En utilisant le premier maximum et le dernier (5ème), on obtient $\delta = \ln(1,7/0,15)/4 \approx 0,61$. En utilisant plutôt le premier et le dernier $\underline{\text{minimum}}$, on obtient $\delta = \ln(2,3/0,2)/4 \approx 0,61$. On gardera donc la valeur $\boxed{\delta = 0,61}$. On en déduit $\boxed{Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}}} \approx \underline{5,2}$. On a donc Q "relativement" grand, ce qui justifie a posteriori les hypothèses précédentes.
Remarque : on constate que pour cette valeur, on aurait pu utiliser la relation simplifiée $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$, ce qui aurait donné $Q = 5,1$.

   c) $\boxed{\frac{T - T_0}{T_0} = \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1} \approx \underline{0,5\,\%}$.

   d) On en déduit que $\omega_0 \approx \omega = 2\pi/T$ à $0,5\,\%$ près. Or $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ donc $\boxed{L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C}} \approx \underline{2,5 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}}$.

   e) Sur le graphe, on lit la valeur maximale à l'instant initial : $\underline{u_{c_{\max}} = 1,6\,\mathrm{V}}$, d'où $\boxed{q_0 = Cu_{c_{\max}}} = \underline{1,6 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}}$.



5. On obtient le portrait ci-contre :
6. $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{q_0}{\tau}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,[\cos(\omega t+\varphi)+\omega\tau\sin(\omega t+\varphi)] = -\frac{q_0}{\tau}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\sin(\omega t+\varphi-\varphi)$. Comme $Q \gg 1$, on obtient à la limite $\omega \approx \omega_0$, et $\omega_0\tau = 2Q \gg 1$ donc $\boxed{i(t) \approx -\omega_0 q_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\sin(\omega_0 t)}$.
7. L'énergie est stoquée sous forme électrique dans le condensateur et magnétique dans le bobine : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$. Comme $Q \gg 1$, on a aussi $\varphi \approx 0$ et $D \approx q_0/C$. D'où $u_c \approx \frac{q_0}{C}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega_0 t)$, ce qui mène à
$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\,\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\,\sin^2(\omega_0 t) \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$
8. D'après l'expression ci-dessus, qui est approximative, $\mathcal{E}$ décroît au cours du temps. En fait ce résultat est exact car le bilan de puissance du circuit s'écrit : $i\,u_c + iL\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -ri^2$. Avec $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ on obtient
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -ri^2 < 0}.$$
Ainsi l'énergie stoquée est disspée à tout instant par effet Joule dans la résistance.
9. $\alpha = 1 - \frac{E(t+T)}{E(t)} \approx 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \approx \frac{2T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{Q}$ d'où $\boxed{\alpha \approx \frac{2\pi}{Q}}$.
Ainsi, le facteur de qualité rend compte de la rémanence de l'énergie stoquée dans le circuit. Plus Q est grand, plus l'énergie met de temps à être dissipée.