ONDES ET OSCILLATEURS

I. PENDULE ELASTIQUE VERTICAL

1. A l'équilibre, la force élastique équilibre le poids : $k\Delta\ell = mg$, d'où $\boxed{k = \dfrac{mg}{\Delta\ell}} = \underline{17,3\,\text{N.m}^{-1}}$.

2. a) On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au point matériel M dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. En projettant selon l'axe Oz, on obtient $m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0)$. En remarquant que la position d'équilibre de M s'écrit $z_{\text{eq}} = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}$, on obtient :

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2\, z_{eq}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta\ell}}}$$

   b) $z_P = z_{\text{eq}}$ est une solution particulière, d'où la solution générale $z(t) = z_{\text{eq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. A $t = 0$ la vitesse est nulle donc $B = 0$, et $z(0) = z_{\text{eq}} + d = z_{\text{eq}} + A$, d'où $A = d$. Finalement

$$\boxed{z(t) = z_{\text{eq}} + d\,\cos(\omega_0 t)}.$$

   c) La vitesse s'écrit $\dot{z} = -d\omega_0\,\sin(\omega_0 t)$. Donc $V_m = d\omega_0 = d\sqrt{\frac{k}{m}}$ d'où en remplaçant par les données du problème :

$$\boxed{V_m = d\sqrt{\frac{g}{\Delta\ell}}} = \underline{0,66\,\text{m.s}^{-1}}.$$

3. a) Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}kd^2\sin^2(\omega_0 t)$. Energie potentielle : $E_p = E_{p\,\text{pes}} + E_{p\,\text{él}} = -mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$. Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p$.

   b) En développant E_p, les termes en cos s'annulent, et on trouve $E_p = -\frac{m^2g^2}{2k} - mg\ell_0 + \frac{1}{2}kd^2\cos^2(\omega_0 t)$. Notons que dans cette expression, la constante pourrait être arbitrairement supprimée car une énergie potentielle est toujours définie à une constante près (cf cours de mécanique). Finalement on obtient $E_m = -\frac{m^2g^2}{2k} - mg\ell_0 + \frac{1}{2}kd^2 = \text{constante}$.

   c) La vitesse est maximale lorsque E_c est maximale donc lorsque E_p est minimale (par conservation de E_m), c'est-à-dire lorsque $E_p = -\frac{m^2g^2}{2k} - mg\ell_0$. Alors

$$E_m = \frac{1}{2}mV_m^2 - \frac{m^2g^2}{2k} - mg\ell_0 = -\frac{m^2g^2}{2k} - mg\ell_0 + \frac{1}{2}kd^2 \Leftrightarrow kd^2 = mV_m^2 \Leftrightarrow \boxed{V_m = d\,\omega_0}.$$

   On retrouve bien la même expression.

4. Les ressorts étant sans masse, ils transmettent parfaitement leur tension d'une extrémité à l'autre. On obtient à l'équilibre

$$\boxed{z_{1,\text{eq}} = \ell_0 + \frac{2mg}{k} = \ell_0 + 2\Delta\ell} \quad \text{et} \quad \boxed{z_{2,\text{eq}} = 2\ell_0 + \frac{3mg}{k} = 2\ell_0 + 3\Delta\ell}$$

5. M_1 subit la force des 2 ressorts et son poids : $m\ddot{z}_1 = -k(z_1 - \ell_0) + k(z_2 - z_1 - \ell_0) + mg$.
M_2 subit seulement la force du ressort inférieur et son poids : $m\ddot{z}_2 = -k(z_2 - z_1 - \ell_0) + mg$.
On en déduit le système différentiel suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{z}_1 + 2\omega_0^2\, z_1 &= \omega_0^2\, z_2 + g \\ \ddot{z}_2 + \omega_0^2\, z_2 &= \omega_0^2\,(z_1 + \ell_0) + g \end{cases}}$$

PCSI 1 - Stanislas *DS de PHYSIQUE N°1 - 28/09/13* - durée 3H A. MARTIN

6. On effectue le changement d'origine spatiale proposé pour étudier les mouvements par rapport aux positions d'équilibre : $\ddot{z}_i = \ddot{Z}_i$ pour $i = 1, 2$, ce qui mène à

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{Z}_1 + 2\omega_0^2\, Z_1 &= \omega_0^2\, Z_2 \\ \ddot{Z}_2 + \omega_0^2\, Z_2 &= \omega_0^2\, Z_1 \end{cases}}$$

7. $\ddot{Z}_i = -\omega^2\, Z_i$ pour $i = 1, 2$, d'où la condition nécessaire vérifiée pour tout t :

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)\, Z_1 - \omega_0^2\, Z_2 &= 0 \\ -\omega_0^2\, Z_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)\, Z_2 &= 0 \end{cases}$$

En isolant $\omega_0^2\, Z_2$ puis en le remplaçant, on obtient qu'à tout instant $[(2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4]\, Z_1 = 0$. Comme Z_1 est par hypothèse non identiquement nulle, la condition nécessaire est

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega_0^4 = 0$$

qui correspond à l'annulation du *déterminant*[1] du système. Il s'agit d'une équation *bicarrée*, que l'on peut récrire sous la forme d'un trinôme en posant $X = \omega^2$: $X^2 - 3\omega_0^2\, X + \omega_0^4 = 0$ de discriminent $\Delta = 5\omega_0^4$. On en déduit les deux seules solutions positives

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}\,\omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}\,\omega_0}.$$

8. On en déduit

$$\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\Delta\ell}{(3 - \sqrt{5})g}}} = \underline{1,22\,\text{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2\Delta\ell}{(3 + \sqrt{5})g}}} = \underline{0,47\,\text{s}}.$$

1. cf cours de maths sur les systèmes linéaires.

II. PRINCIPE DU RADAR

1. Radar monostatique

1. a) $\boxed{\lambda = c/f} = \underline{10,3\,\text{cm}}$, et $\boxed{N = \tau f} = \underline{2900\,\text{oscillations}}$.
   b) En l'absence de données supplémentaires on suppose que les échos proviennent de la dernière impulsion émise. La distance parcourue est le double de la distance radar-véhicule, d'où $\boxed{d_X = \frac{1}{2}ct_X}$ avec $X = A, B$ ou C. D'où $\underline{d_A = 0,45\,\text{km}}$, $\underline{d_B = 12,0\,\text{km}}$ et $\underline{d_C = 13,5\,\text{km}}$.
   Remarque : ces valeurs très élevées correspondent en fait à des signaux reçus par un radar de contrôle aérien.
   c) L'onde émise par l'antenne du radar se propage dans toutes les directions de l'espace (pas de manière uniforme...), donc comme pour une onde sphérique l'amplitude de l'onde s'atténue à mesure que l'on s'éloigne de la source. Plus l'objet réfléchissant est éloigné, plus l'impulsion qu'il reçoit est de faible amplitude, ce que l'on retrouve sur le schéma.
   d) Pour que l'écho soit interprétable, il doit arriver après la fin de l'impulsion, mais se terminer avant le début de l'impulsion suivante. La durée du trajet est donc dans l'intervalle $[\tau, T - \tau]$, donc la distance entre $\boxed{d_m = \frac{1}{2}c\tau} = \underline{150\,\text{m}}$ et $\boxed{d_M = \frac{1}{2}c(T-\tau)} = \underline{14,9\,\text{km}}$.
2. a) On note d_0 la distance radar-véhicule au début de la première impulsion ($t = 0$). Les instants de réception des deux échos successifs sont[2] $t_1 = 2d_0/c$ et $t_2 = T + 2(d_0 + vT)/c$. D'où
$$\boxed{\Delta t = T + \frac{2vT}{c}} = \underline{100,0\,\mu\text{s}}.$$
   b) La différence avec T est $\frac{2vT}{c} \sim 10^{-11}$ s, ce qui est bien en dessous de la précision affichée (10^{-7} s). Ce protocole de mesure paraît donc inadapté ici.
3. a) Il s'agit en fait du même calcul que précédemment, mais on traduit les durées en déphasage : $\varphi = -2\pi f t_1$ donc $\boxed{\varphi = -2\pi f \frac{2d_0}{c}}$. En effet l'écho est en retard de phase par rapport au signal émis au niveau du radar.
   b) Le second vaut $\varphi_2 = -2\pi f t_2 = -2\pi f \frac{2(d_0+vT)}{c}$, d'où $\boxed{\Delta\varphi = -2\pi f \frac{2vT}{c}} = \underline{-0,44\,\text{rad}}$
   c) Cela représente environ 7% d'une période. Pour mesurer ce déphasage, il faut donc avoir une précision au plus de l'ordre de 1%, ce qui est facilement accessible si l'on est capable d'accéder directement à la mesure de $\Delta\varphi$ sans passer par une mesure temporelle (par exemple en mesurant la moyenne du produit des deux signaux...).

2. Radar bistatique

4. Comme précédemment, on considère un temps d'aller-retour de $\frac{2d}{c}$ d'où un déphasage[3]
$$\boxed{\varphi(t) = -2\pi f \frac{2}{c}(d_0 + vt)}.$$
5. D'où $s_r(t) = S_r \cos\left(2\pi f \left(1 - \frac{2v}{c}\right) t + 2\pi f \frac{2d_0}{c}\right)$. Par identification le signal a donc une fréquence $f' = f\left(1 - \frac{2v}{c}\right)$, d'où l'écart $\boxed{\Delta f = -\frac{2v}{c} f} = \underline{-698\text{Hz}}$, c'est-à-dire $\frac{\Delta f}{f} = -\frac{2v}{c} = -2,4.10^{-7}\,\%$ d'écart. Il s'agit de l'effet DOPPLER. On retrouve bien que la fréquence reçue est plus faible si le véhicule s'éloigne.

2. Dans un calcul plus précis on prend en compte le fait que la voiture s'est déplacée entre le moment de l'émission et celui de la réflexion, ce qui introduit un facteur multiplicateur $1 + \frac{v}{c}$ devant les durées de propagation. Compte-tenu des valeurs numériques on a $\frac{v}{c} \ll 1$ et cette correction n'est pas nécessaire ici.

3. De nouveau un calcul plus exact prend en compte le déplacement de la voiture pendant le temps δt de propagation de la lumière via $\varphi(t) = -2\pi f \frac{2}{c}(d_0 + v(t - \delta t))$. Cela conduit à $\delta t = \frac{v}{v+c}t + \frac{d_0}{v+c}$ et $\varphi(t) = -2\pi f \frac{2}{c}\left(d_0 + \frac{vc}{v+c}(t - \frac{d_0}{c})\right)$. Comme ici $\frac{v}{c} \ll 1$ on peut toujours négliger cette correction.

6. a) Il s'agit d'une superposition de signaux asynchrones de fréquences très proches, et d'amplitudes différentes. On observe donc des battements *(faire les* **SCHEMA** *de Fresnel en coïncidence puis en anti-coïncidence)*, dont l'amplitude minimale n'est pas nulle (amplitudes respectives différentes).
   b) La moitié de la durée Δt_b d'un battement correspond au temps nécessaire pour que la phase du signal le plus rapide se décalle de π par rapport au signal le plus lent, en partant d'une situation de coïncidence : $2\pi f' \frac{\Delta t_b}{2} = 2\pi f \frac{\Delta t_b}{2} + \pi$, d'où $\boxed{\Delta f = \frac{1}{\Delta t_b}}$. Il suffit alors de mesurer la durée Δt_b d'un battement.
   c) Ici on doit donc mesurer $\Delta t_b = 1/\Delta f = \underline{1,4.10^{-3}\,\text{s}}$. Cette durée est facilement mesurable, notamment pour les conditions de l'énoncé où les temps sont déterminés à 10^{-7} s près. Cette dernière méthode présente l'avantage d'être d'autant plus précise que la vitesse v est faible (Δt_b augmente quand v diminue, donc la mesure devient plus facile), au contraire des 2 autres méthodes. Elle sera donc préférable pour de faibles vitesses. Pour des vitesses suffisamment rapides la seconde méthode présente l'avantage de ne nécessiter qu'une seule antenne.

3. Polarisation des trains d'ondes

7. Puisque chaque antenne crée un champ électrique dans sa direction, il faut les orienter de sorte qu'elles soient **perpendiculaires** (et biensûr toujours orthogonales à la ligne de visée). Elles doivent émettre des signaux **synchrones**, de **même amplitude**, et **déphasés de** $\pm\frac{\pi}{2}$.

III. ONDES ULTRASONORES

1. a) $U_1 = 2,5 * 2 = \underline{5\,\text{V}}$, d'où $\boxed{U_{e\,1} = U_1/\sqrt{2}} = \underline{3,5\,\text{V}}$.
   b) De façon générale $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi f t + \varphi)$. Comme $u_1(0) = 0$ et que le signal est d'abord décroissant, on obtient $\boxed{u_1(t) = -U_1 \sin(2\pi f t)}$.
2. a) Les signaux sont en phase. Si on écarte le micro, le signal temporel capté se trouve retardé par rapport à la référence. Donc la petite sinusoïde se décalle vers la droite. L'onde diminuant légèrement en amplitude avec la distance à la source, l'amplitude décroît légèrement à mesure qu'on éloigne le micro.
   b) On a donc $\underline{\lambda = C_1C_2 = 1,4\,\text{cm}}$. D'où $\boxed{c = \lambda f} = \underline{350\,\text{m.s}^{-1}}$.
3. L'onde incidente globale s'écrit $\boxed{p_i(x,t) = P_0 \cos(2\pi f t - kx)}$ avec $k = 2\pi/\lambda$. L'onde réfléchie s'écrit a priori $\boxed{p_r(x,t) = P_0 \cos(2\pi f t + kx + \varphi)}$.
4. Il s'agit d'une superposition de deux ondes progressives sinusoïdales synchrones de même amplitude se propageant en sens inverse. C'est donc une onde stationnaire, de forme $p(x,t) = 2P_0 \cos(kx + \frac{\varphi}{2}) \cos(2\pi f t + \frac{\varphi}{2})$. Or l'amplitude des variations de la pression est maximale en $x = 0$ (ventre de pression), donc $|\cos(\frac{\varphi}{2})| = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0\,[2\pi]$. Finalement, on a $\boxed{p(x,t) = 2P_0 \cos(kx) \cos(2\pi f t)}$. *Faire un* **SCHEMA** *(pression acoustique à l'instant t, nœuds et ventres).*
5. Les ventres de l'onde stationnaire sont distants d'une demi-longueur d'onde ($\cos(kx)$), donc $\boxed{d = \lambda/2} = \underline{0,7\,\text{cm}}$.