ONDES ET OSCILLATEURS

On prendra soin d'établir d'abord les résultats sous forme littérale, si possible en fonction des données, avant de passer à l'application numérique éventuelle.
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

I. PENDULE ELASTIQUE VERTICAL

On considère une masse $m = 250\,\mathrm{g}$ de centre d'inertie M suspendue à un ressort de masse négligeable. Dans la suite on assimile cette masse à un point matériel M de masse m. On suppose que le mouvement reste selon l'axe vertical Oz, choisi descendant, l'origine O étant située sur le support. On note $g\,\vec{u}_z$ le champ de pesanteur, avec $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$. A l'équilibre, le ressort s'est allongé d'une longueur $\Delta\ell = 14,2\,\mathrm{cm}$.

1. Calculer la raideur k du ressort.
2. On écarte la masse vers le bas d'une distance $d = 8,0\,\mathrm{cm}$ par rapport à sa position d'équilibre, distance inférieure à la longueur à vide ℓ_0 du ressort. Puis on lâche la masse sans vitesse initiale.
   a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse vérifiée par $z(t)$.
   b) Résoudre cette équation et donner la loi horaire de $z(t)$ compte-tenu des conditions initiales.
   c) En déduire la vitesse maximale V_m atteinte par la masse au cours du mouvement. Calculer sa valeur numérique.
3. a) Définir explicitement les énergies cinétique E_c, potentielle E_p, et mécanique E_m de la masse.
   b) Montrer que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement.
   c) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, retrouver l'expression de la vitesse maximale V_m de la masse au cours du mouvement.

On suspend à l'oscillateur précédent un second oscillateur constitué d'un ressort et d'une masse identiques. On nomme M_1 et M_2 les deux points matériels, et z_1 et z_2 leur cote.

4. Etablir l'expression des positions d'équilibre $z_{1,\mathrm{eq}}$ et $z_{2,\mathrm{eq}}$ en fonction des données.
5. Etablir l'équation différentielle du mouvement de chaque point matériel, vérifiée par $z_1(t)$ et $z_2(t)$.
6. On pose $Z_1 = z_1 - z_{1,\mathrm{eq}}$ et $Z_2 = z_2 - z_{2,\mathrm{eq}}$. En déduire les équations différentielles vérifiées par $Z_1(t)$ et $Z_2(t)$.
7. Une analyse mathématique nous montrerait qu'on peut chercher l'ensemble des solutions du système différentiel précédent sous la forme

   $$Z_1(t) = A_1\,\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad Z_2(t) = A_2\,\cos(\omega t + \varphi_2)\,.$$

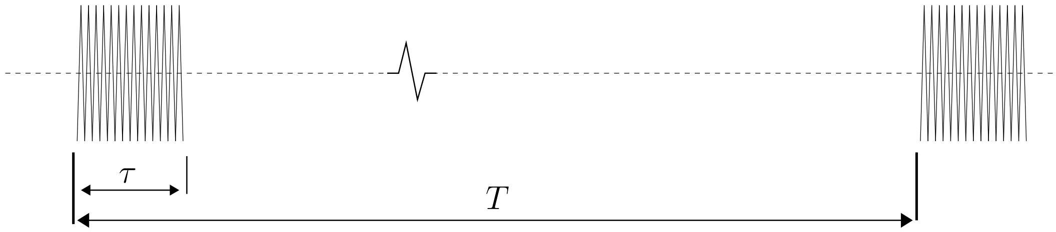
   La solution générale sera une combinaison linéaire des solutions possibles, qui constituent les *modes propres* du système.
   Montrer les valeurs de ω possibles sont imposées par le système. Déterminer leur expression.
8. Calculer la période de chaque mode propre (expression et valeur numérique).

II. PRINCIPE DU RADAR

Un radar (*Radio Detection And Ranging*) est un appareil utilisant des ondes radio [1] pour détecter la présence d'objets mobiles, et pouvant également déterminer leur distance et leur vitesse. On présente ici les principes de ces deux mesures.

1. Radar monostatique

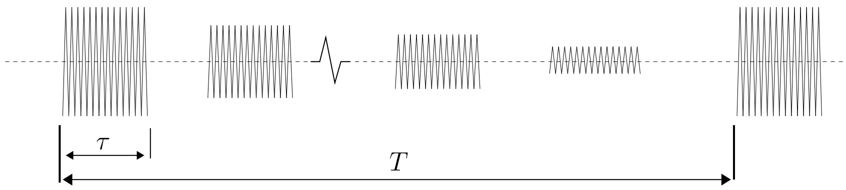
On s'intéresse d'abord à un radar de type *monostatique*, c'est-à-dire comportant une unique antenne qui joue alternativement le rôle d'émetteur puis de récepteur. En mode émetteur, le radar émet, avec une période T, des impulsions prenant la forme de trains d'ondes sinusoïdaux de fréquence f et de durée limitée τ. Deux de ces impulsions successives sont représentées sur le schéma ci-dessous (attention il y a une rupture d'échelle de temps due au fait que les durées sont d'ordres de grandeur très différents).



Données : On s'intéresse à un radar qui émet des impulsions de fréquence $f = 2,90\,\text{GHz}$, de durée $\tau = 1,0\,\mu\text{s}$, espacées d'une période $T = 100,0\,\mu\text{s}$.
On prendra pour la célérité des ondes électromagnétiques $c = 3,00\,10^8\,\text{m.s}^{-1}$.

Mesure de la position

1. L'enregistrement ci-dessous montre deux impulsions émises par le radar, commençant aux instants $t_0 = 0,0\,\mu\text{s}$ et $t_1 = 100,0\,\mu\text{s}$, et trois échos renvoyés par des objets, commençant aux instants $t_A = 3,0\,\mu\text{s}$, $t_B = 80,0\,\mu\text{s}$ et $t_C = 90,0\,\mu\text{s}$.



   a) Calculer la longueur d'onde λ des ondes émises pendant une impulsion, et le nombre N d'oscillations dans chaque impulsion.

   b) Déterminer la distance à laquelle se trouvent les différents objets détectés, en supposant que les ondes se propagent à la même célérité que dans le vide.

   c) Comment expliquer la différence d'amplitude entre les impulsions initiales et les échos ?

   d) Sachant que l'antenne ne peut pas détecter de signal reçu tant qu'elle est en train d'émettre une impulsion, montrer qu'il existe une distance minimale d_m et une distance maximale d_M en dehors desquelles on ne peut pas détecter la position d'un objet. Calculer leur valeur numérique.

Mesure de la vitesse

On souhaite mesurer la composante longitudinale v (c'est-à-dire dans la direction de la ligne de visée du radar) de la vitesse d'un véhicule sur une route.
Pour les applications numériques, on supposera que le véhicule se déplace à $v = 130\,\text{km.h}^{-1}$.

2. **Mesure directe :**
   La première méthode consiste à mesurer le décalage temporel entre deux échos successifs.

1. ondes électromagnétiques de fréquences comprises entre 3 MHz et 110 GHz selon les applications

a) Calculer ce décallage Δt.

b) D'après le nombre de chiffres significatifs des données, le niveau de précision atteint dans la mesure des durées est-il suffisant pour appliquer cette méthode ?

3. **Mesure indirecte :**
Les impulsions successives sont envoyées toujours avec la même phase à l'origine [2].

a) On suppose qu'au moment de la réflexion d'une impulsion, le véhicule est situé à la distance d. Exprimer le déphasage φ perçu au niveau de l'antenne entre le signal de l'impulsion et son écho.

b) Pour deux impulsions successives notées 1 et 2, on mesure la différence $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ entre les deux déphasages écho-impulsion. Exprimer $\Delta\varphi$. Calculer sa valeur numérique.

c) Que dire du niveau de précision requis ? Commenter.

2. Radar bistatique

On utilise maintenant un radar *bistatique*, comportant deux antennes différentes, l'une jouant constamment le rôle d'émetteur, et l'autre jouant constamment le rôle de récepteur. Le radar émet une onde sinusoïdale continue de fréquence f, qui au niveau de l'antenne s'écrit

$$s_i(t) = S_i \cos(2\pi f t) \ .$$

On souhaite toujours mesurer la composante longitudinale v de la vitesse d'un véhicule qui s'éloigne du radar, avec $v = 130\,\text{km.h}^{-1}$. On note $d = d_0 + vt$ la distance séparant le véhicule du radar. Le signal réfléchi reçu par la seconde antenne s'écrit

$$s_r(t) = S_r \cos(2\pi f t + \varphi(t))$$

où $\varphi(t)$ est le déphasage relatif au signal $s_i(t)$, qui dépend du temps puisque la distance d en dépend.

4. Etablir l'expression de $\varphi(t)$ en fonction de t, v, c et f.
5. En déduire que le signal reçu $s_r(t)$ a en réalité une fréquence effective f' différente de f. Exprimer la différence $\Delta f = f' - f$. Faire l'application numérique, en prenant toujours $f = 2{,}90\,\text{GHz}$.
6. Pour mesurer Δf, on réalise un traitement électronique qui consiste à superposer les signaux $s_i(t)$ et $s_r(t)$.

a) Représenter l'allure du signal $s_i(t)+s_r(t)$, en la justifiant à l'aide de représentations de Fresnel.

b) Comment peut-on mesurer Δf ? Justifier votre réponse.

c) Le niveau de précision requis est-il atteint ? Au regard des trois méthodes exposées pour mesurer la vitesse, laquelle est la plus efficace en terme de précision ?

3. Polarisation des trains d'ondes

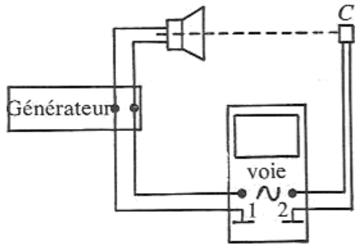
Une antenne rectiligne génère à grande distance une onde électromagnétique polarisée rectilignement dans la direction de l'antenne. Pour éviter les interférences liées à la pluie, on souhaite que la polarisation soit plutôt circulaire.

7. Expliquer comment concevoir cette polarisation en remplaçant l'antenne émettrice par un couple de deux antennes émettrices.

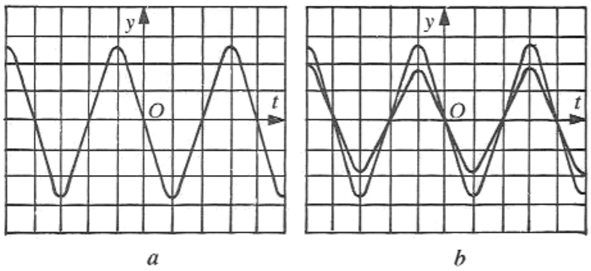
2. La phase au démarrage de l'impulsion n est identique à la phase au démarrage de l'impulsion $n+1$.

III. ONDES ULTRASONORES

Un haut-parleur alimenté par un Générateur Basse Fréquence (GBF) émet des vibrations ultrasonores longitudinales sinusoïdales de fréquence $f = 25\,\text{kHz}$. On rappelle qu'à toute onde acoustique, on associe une perturbation de pression p appelée *surpression* ou *pression acoustique*, qui s'ajoute à la pression ambiante constante. On étudie ces ondes sur l'axe du haut-parleur à l'aide d'un capteur C (microphone sensible à la pression) qui produit une tension en phase avec la surpression.



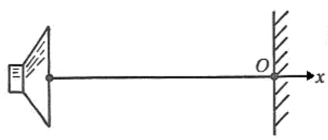
On utilise un oscilloscope bicourbe avec lequel on observe les tensions aux bornes du GBF (u_1 en voie 1) et du microphone (u_2 en voie 2). On obtient les oscillogrammes ci-dessous décrit dans la usite du texte.



1. a) En observant uniquement la voie 1, on obtient l'oscillogramme a ci-dessus, sur un calibre de 2 V par cm. Quelle est la valeur de l'amplitude U_1 de la tension u_1 ? Quelle est sa valeur efficace U_{e1} ?
   b) L'origine des temps coïncide avec le passage du spot au centre de l'écran, donner l'expression (littérale) de la tension $u_1(t)$.
2. Pour une position C_1 du microphone, on observe l'oscillogramme b.
   a) On éloigne alors progressivement le capteur du haut-parleur. Comment est modifiée la courbe représentant $u_2(t)$, celle représentant $u_1(t)$ restant fixe ?
   b) On continue d'éloigner le capteur jusqu'à ce que l'on obtienne à nouveau, et pour la première fois, à la position C_2, les courbes telles que représentées sur l'oscillogramme b. La distance C_1C_2 étant de 1,4 cm, quelle est la longueur d'onde λ du son émis ? Déterminer la célérité c des ondes ultrasonores dans l'air.

On place à l'origine O une surface plane réfléchissant parfaitement les ondes sonores (cf figure ci-dessous).

Suite à des réflexions multiples, les ondes progressant vers la droite (sens de l'axe Ox) se superposent pour former un signal $p_i(x,t)$ sinusoïdal d'amplitude p_0, et les ondes progressant vers la gauche se superposent pour former un signal sinusoïdal $p_r(x,t)$ supposé de même amplitude (réflexion parfaite).



3. Donner la forme générale de $p_i(x,t)$ et $p_r(x,t)$. On définira les quantités introduites.
4. Quelle est la nature de l'onde globale formée de la superposition de toutes les ondes ? Etablir et décrire sa forme $p(x,t)$. Que vérifie la pression au niveau de la surface réfléchissante ?
5. On place un petit microphone (sensible à la surpression) en O. A quelle distance d faut-il écarter le micro sur l'axe pour retrouver la même amplitude qu'en O ?