Devoir de rentrée

1. Dilution d'alcool dans l'océan

On souhaite prélever un volume V_e d'eau de mer pour y trouver N molécules d'alcool, c'est-à-dire $n = N/\mathcal{N}_A$ moles ($\mathcal{N}_A =$ nombre d'Avogadro). Si l'alcool est dilué de façon uniforme à une concentration c, alors $V_e = n/c$. L'alcool est de l'éthanol (CH_3CH_2OH ou C_2H_6O), de masse volumique ρ_a et de masse molaire M_a. Il est introduit un volume d'alcool V_a contenant n_a moles dans l'océan entier, de volume V_{oc}. Avec ces notations, on obtient une concentration

$$c = \frac{n_a}{V_{oc}} = \frac{m_a}{V_{oc}M_a} = \frac{V_a\rho_a}{V_{oc}M_a}$$

ce qui conduit finalement à

$$\boxed{V_e = \frac{N\,V_{oc}\,M_a}{\mathcal{N}_A\,V_a\,\rho_a}}.$$

On cherche le cas où $N = 1$ et $V_a = 1\,\mathrm{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. Quelques recherches sur Wikipedia (et liens) conduisent à $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$, $V_{oc} = 1,3 \times 10^{18}\,\mathrm{m}^3$, $M_a = 2 * 12 + 6 * 1 + 16 = 46\,\mathrm{g.mol}^{-1} = 4,6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg.mol}^{-1}$ et $\rho_a = 789\,\mathrm{kg.m}^3$. Ceci conduit à $\underline{V_e = 1,3 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^3 = 0,17\,\mathrm{cm}^3}$, c'est-à-dire quelques gouttes d'eau.

2. L'ombre des nuages

Notons ℓ_n le diamètre du nuage (circulaire), et h sa hauteur (distance à la surface terrestre). On cherche le rapport entre le diamètre ℓ_o de l'ombre du nuage et ℓ_n. Le Soleil étant plus grand que le nuage, ce dernier créée un cône d'ombre de hauteur ℓ_c, dont le sommet est dirigé vers l'intérieur de la terre. Si $\ell_c < h$, il n'y a pas d'ombre en surface. Si $\ell_c > h$ il y a une ombre au sol, **toujours plus petite que le nuage**.
Toutefois on peut se demander si l'ombre est vraiment beaucoup plus petite que le nuage. Faisons le calcul. Tout d'abord le rapport $\frac{\ell_o}{\ell_n}$ ne dépend pas de l'angle d'incidence des rayons solaires sur la surface, car on peut toujours considérer le nuage comme un disque occultant parallèle à la surface terrestre [1]. Donc on peut considérer par simplicité le cas d'un soleil au zénith (incidence normale pour le rayon constituant l'axe du cône). Notons d_s et D le diamètre du soleil et sa distance à la Terre. L'angle au sommet du cône est

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{d_s}{D} = \frac{\ell_n}{\ell_c} = \frac{\ell_o}{\ell_c - h} \Rightarrow \frac{\ell_o}{\ell_n} = 1 - \frac{h}{\ell_c} = 1 - \frac{hd_s}{\ell_n D}$$

SCHEMA

Cherchons **dans quel cas l'ombre est supérieure à 90% de la taille du nuage** :

$$\frac{\ell_o}{\ell_n} > 0,9 \Leftrightarrow \frac{hd_s}{\ell_n D} < 0,1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\ell_n}{h} > 10\,\frac{d_s}{D}} \approx \underline{0,09}$$

en prenant $d_s \approx 1,39 \times 10^6\,\mathrm{km}$ et $D = 1,50 \times 10^8\,\mathrm{km}$ (Wikipedia). Ainsi, pour un nuage bas, $h \sim 1000\,\mathrm{m}$, on obtient $\ell_n > 90\,\mathrm{m}$ ce qui est très fréquemment réalisé. Par contre pour un nuage haut, $h \sim 10000\,\mathrm{m}$, on obtient $\ell_n > 900\,\mathrm{m}$ ce qui est déjà plus contraignant (mais fréquent notamment pour les cumulonimbus). Finalement, **les ombres des nuages sont bien souvent de taille comparable à celle des nuages qui les forment.**

3. Réfraction du son dans l'eau

De même que pour les ondes lumineuses (cf cours d'optique), les ondes sonores peuvent être analysées comme constituées de rayons dans un certain domaine d'approximation. Ceci est particulièrement valable si l'interface entre les deux milieux (ex : surface entre l'air et l'eau) est étendue et grande devant la longueur d'onde des ondes sonores.

En optique, l'*indice* (de réfraction) d'un milieu matériel est le rapport entre la vitesse de la lumière dans ce milieu et la vitesse dans le vide : $n = \frac{c}{v}$. Le son ne se propage pas dans le vide, il a besoin d'un milieu matériel. Mais par analogie on peut se référer à l'air, qui est beaucoup moins dense que l'eau liquide. En effet, ce qui

1. L'atmosphère est stratifiée parallèlement à la surface...

compte dans la loi de Descartes de la réfraction, c'est uniquement le rapport des deux indices, et donc le rapport des deux célérités :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \Leftrightarrow \sin i_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin i_2 = \frac{v_1}{v_2}\sin i_2$$

Ainsi on introduit, pour la traversée de l'interface (dioptre) par les ondes sonores, le rapport des vitesses de propagation :

$$\sin i_{\mathrm{eau}} = \frac{v_{\mathrm{eau}}}{v_{\mathrm{air}}}\sin i_{\mathrm{air}} = \frac{1}{n_{\mathrm{eau/air}}}\sin i_{\mathrm{air}}$$

On trouve dans les conditions ambiantes $v_{\mathrm{air}} \approx 340\,\mathrm{m.s}^{-1}$ et $v_{\mathrm{eau}} \approx 1500\,\mathrm{m.s}^{-1}$. D'où l'indice

$$\boxed{n_{\mathrm{eau/air}} = \frac{v_{\mathrm{air}}}{v_{\mathrm{eau}}}} \approx \underline{0,23}.$$

Ici on trouve un indice inférieur à 1, contrairement aux ondes lumineuses pour lesquelles un indice inférieur à 1 est impossible. On obtient aussi

$$\sin i_{\mathrm{eau}} \approx 4,4\,\sin i_{\mathrm{air}} > \sin i_{\mathrm{air}}$$

Donc le rayon incident en provenance de l'air s'écarte largement de la normale au dioptre. Et il est donc facile d'obtenir une réflexion totale du son si l'incidence est un peu trop grande, cad si elle est supérieure à $\boxed{i_{\mathrm{air\ lim}} = \arcsin n} = \underline{13°}$.

4. Les trois obus

L'obus est assimilé à un point matériel en mouvement balistique dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, supposé uniforme. Le référentiel terrestre étant supposé galiléen, le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) conduit après projection sur l'axe horizontal Ox et vertical Oy à

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -g$$

Après intégration et application des conditions initiales (départ à l'origine du repère avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale), on obtient

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$$

Après élimination du temps on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire,

$$\boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + \tan\alpha\,x},$$

qui est celle d'une parabole « renversée »(les branches tendant vers $-\infty$).
Sur la figure, appelons respectivement 1, 2 et 3 les trajectoires obtenues pour $\alpha = 30°$, $45°$ et $60°$. Elles ressemblent toutes approximativement à des paraboles renversées. Mais regardons plus en détail.

- L'observation montre tout d'abord que les trajectoires 1 et 2 ne sont pas parfaitement paraboliques car pas vraiment symétriques par rapport à l'axe vertical passant par le sommet. En cela elles ressemblent plus à des **trajectoires en pésence de frottement**.
- La **portée** d est la distance horizontale atteinte par l'obus lorsque $z = x(0) = 0$. On l'obtient par exemple en utilisant l'équation de la trajectoire $0 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,d^2 + \tan\alpha\,d$, ce qui conduit à

$$\boxed{d = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\,\sin 2\alpha}.$$

  On déduit que **la portée doit être la même pour les trajectoires 1 et 3**, ce qui n'est pas le cas sur le graphe. Par contre **la portée est supérieure dans le cas 2**, ce qui est bien représenté.
- Vérifions que la trajectoire 2 est vraiment correcte. La hauteur maximale atteinte h est calculée par exemple en cherchant l'instant tel que la vitesse verticale s'annule : $t = v_0\sin\alpha/g$ et en reportant dans $z(t)$. On obtient $\boxed{h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$. Ainsi, pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on obtient cette **relation remarquable entre hauteur maximale et portée** : $\boxed{d = 4h}$. Cette propriété semble bien vérifiée sur le dessin.

5. L'ascenseur en chute libre

Dans un référentiel galiléen, un corps de masse m en chute libre en l'absence de frottements vérifie $\vec{a} = \vec{g}$ ou $\ddot{z} = -g$ après projection. Ainsi, tous les corps en chute libre à partir d'un même instant de départ auront la même vitesse, quelque soit leur masse. Donc dans l'ascenseur, toutes les parties matérielles tombent à la même vitesse. Il n'y a donc plus de forces d'appui ni de traction d'un objet sur l'autre. Dans le référentiel lié à l'ascenseur, tout se passe comme si les objets matériels ne subissaient plus la pesanteur terrestre.

1. Il n'y a donc plus d'actions réciproques entre la personne et le pèse-personne, qui indique donc « 0 kg », bien que la masse n'ait pas changé...
2. Le thé n'a pas de raison de s'écouler dans la tasse. Il risque plutôt de s'échapper de la théïère et se mettre à flotter librement dans l'air.

6. La chute des deux balles

On néglige les frottements de l'air. Si la balle de droite roule sans glisser, l'application du théorème de l'énergie cinétique indique que dans les deux cas, l'énergie cinétique acquise en bas est égale à l'énergie potentielle perdue :

$$E_c = mgh \quad \text{ou} \quad E_c/m = gh$$

L'énergie cinétique étant proportionnelle à la masse m, cette équation est indépendante de m.
La balle de gauche tombe sans contact avec le support, donc ne se met pas à tourner. Elle acquiert donc uniquement de l'énergie cinétique en translation : $E_c/m = \frac{1}{2}v_f^2 = gh$.
La balle de droite se met à tourner en même temps qu'elle avance. Son énergie cinétique se répartit donc en un terme de translation et un terme de rotation propre : $E'_c/m = \frac{1}{2}v_f'^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{m}\,\omega_f'^2 = gh$ où ω'_f est la vitesse angulaire finale de la boule, et J son moment d'inertie autour d'un de ses diamètres. Par comparaison :

$$\frac{1}{2}v_f^2 = \frac{1}{2}v_f'^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{m}\,\omega_f^2$$

Donc $v_f > v'_f$. **La balle de gauche se déplace donc plus rapidement que celle de droite.**

7. Le sablier sur la balance

Lorsqu'un grain de sable se met à tomber, la poussée qu'il exerçait sur le sablier (ou sur d'autres grains statiques encore solidaires du sablier) devient nulle. Ceci conduit à une diminution de la poussée globale du sablier sur le plateau. Donc le sablier doit remonter légèrement. Cependant, lorsque l'écoulement stationnaire du sable est établi, la perte de poids déclenchée par la chute de nouveaux grains est entièrement compensée par l'arrivée d'une même quantité de grains au fond du sablier. Le sablier est alors légèrement plus léger que 5 g puisqu'à tout moment des grains sont en chute. Toutefois, en chutant les grains acquièrent une quantité de mouvement qu'ils restituent au sablier arrivés en bas, créant un flux de quantité de mouvement vers le bas. Un basculement vers le haut ou vers le bas est alors possible, tout dépend de sa forme. A la fin de l'écoulement, les derniers grains ajoutent la poussée manquante et rétablissent l'équilibre entre les plateaux.

8. Une expérience amusante

Cette expérience est souvent présentée comme mettant en évidence la pression atmosphérique. Toutefois celle-ci ne suffit pas à expliquer l'expérience. Le fait que l'expérience puisse réussir avec un verre partiellement rempli (ou pas, cela dépend du volume d'air restant et de la forme du verre) permet de la comprendre plus complètement.
Considérons un verre partiellement rempli d'eau sur lequel on plaque la feuille. Une fois retourné l'ensemble, avec la feuille plaquée vers le haut par l'opérateur, l'air forme une bulle au dessus du verre. Cette bulle a la même pression qu'avant retournement car on a simplement inversé le dessus et le dessous du récipient fermé. c'est-à-dire la pression atmosphérique. Donc la pression dans l'eau au contact de la feuille est alors supérieure à la pression atmosphérique (à cause du poids de l'eau). Lorsque l'opérateur lâche la feuille, la pression atmosphérique extérieure contribue à plaquer la feuille sur le verre mais n'est donc pas suffisante pour maintenir l'équilibre,

d'autant plus que la feuille a elle aussi un poids non nul. Ainsi, il est nécessaire de faire appel alors des forces supplémentaires agissant au contact entre les trois interfaces verre-eau-papier : les forces de tension superficielle. En plus de maintenir une adhérence, ces forces rendent la fermeture étanche. Enfin, alors que le liquide tend à descendre légèrement, l'air de la bulle se détend ce qui créée une légère dépression, réduisant la poussée du liquide sur le papier.
Ainsi, la réussite de cette expérience ne saurait s'expliquer sans la combinaison subtile entre la force de pression atmosphérique et les forces de tension superficielle [2]

9. Dilatation

1. Le *coefficient de dilatation du fer* et celui du béton sont très proches ($\sim 12 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$), donc **les deux matériaux se dilatent de façon comparable et sans destruction.**
2. L'erreur courante consiste à penser qu'en chauffant, la dilatation va boucher le trou. C'est le contraire qui se produit : les particules s'écartent dans toutes les directions, donc le périmètre du trou s'agrandit. **Il faut donc refroidir la plaque pour réduire le trou.** Mais peut-on le boucher ? Le coefficient de dilatation de l'acier est $\beta = 12,0 \times 10^{-6} 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ (source Wikipedia, Dilatation thermique) et représente la variation relative de volume pour une variation de un degré. En refroidissant au maximum la plaque depuis la température ambiante jusqu'au zéro absolu (soit environ 300 K), on obtiendrait une variation relative de $\beta * 300 = 0,0036 = 0,36\%$. **On ne peut donc que réduire très faiblement le volume du trou, en aucun cas le boucher.**
3. D'après Wikipedia (article « Module d'Young »), le module d'Young E permet de calculer la force de traction (ou de compression) par unité de surface de sa section (aussi appelée *contrainte*) $\sigma = \frac{F}{s}$ pour une barre subissant un étirement relatif $\frac{\Delta\ell}{\ell}$:
$$\frac{F}{s} = E\,\frac{\Delta\ell}{\ell}\,.$$
Par ailleurs, le coefficient de compressibilité permet d'accéder à la variation relative de volume pour une variation de température donnée ΔT :
$$\frac{\Delta V}{V} = \beta\Delta T$$
Le volume s'écrit, par exemple pour une barre de section circulaire [3], $V = \pi r^2 \ell$. Une différentiation logarithmique conduit à
$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = 2\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}\ell}{\ell} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta\ell}{\ell}$$
L'allongement relatif est obtenu à condition de considérer que le matériau se dilate dans les mêmes proportions dans toutes les directions : $\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$ donc $\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta\ell}{\ell}$, ce qui conduit finalement à
$$\boxed{F = s\,E\,\frac{\beta}{3}\,\Delta T} \approx \underline{1,7 \times 10^3\,\mathrm{N}}\,.$$
Ramenée à une masse (par la relation $P = mg$), cette force correspond au poids d'une masse de 170 kg.

10. Allumette

Le *pouvoir calorifique* du bois est $\mathrm{PC} = 15 \times 10^6\,\mathrm{J.kg}^{-1}$ (Wikipedia). La masse d'une allumette de l'ordre de $m = 0,1\,\mathrm{g}$. Une allumette brûle en un temps de l'ordre de $\Delta t = 20\,\mathrm{s}$. Ainsi, la puissance libérée par l'allumette enflammée est
$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathrm{PC} * m}{\Delta t}} = \underline{75\,\mathrm{W}}\,.$$
On trouve l'ordre de grandeur de puissance d'une ampoule à incandescence (désormais interdite à la vente). Au-delà du caractère peu pratique de s'éclairer avec des torches, le problème est le même que celui qui a conduit à l'abandon des ampoules à incandescence, en pire : l'essentiel de la puissance aboutit à une emission dans l'infra-rouge, hors du domaine visible, à cause d'une température de flamme trop basse (cf loi du corps noir).

2. Essayez avec des verres de différentes formes, différents liquides, différents papiers (cartonné, glacé, absorbant...).
3. On vérifiera qu'on obtiendrait la même chose pour une section rectangulaire.