

# MÉCANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

## I. Mouvement d'une plaque sur un ou deux cylindres

1. a) Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) dans  $\mathcal{R}$  pour la plaque s'écrit  $m \vec{a}_G = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{N}' + \vec{T}'$ . Par projection selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  ceci conduit, avec des notations algébriques pour les forces de contact, à

$$m \ddot{x} = T + T' \quad (1)$$

$$0 = -mg + N + N' \quad (2)$$

- b) Le Théorème du Moment Cinétique (TMC) dans  $\mathcal{R}^*$  en  $G$  pour la plaque s'écrit  $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}^G$ . L'ensemble des forces et le mouvement sont dans le plan  $Oxz$  donc le TMC peut s'écrire de façon scalaire uniquement selon l'axe orthogonal  $Oy$ . La plaque ne tourne pas tant qu'elle est au contact des deux rouleaux, donc le moment cinétique est nul. Les forces de réaction tangentielles  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$  ont leur support qui passe par  $G$  donc leur moment en  $G$  est nul. Le moment résultant des forces de pesanteur est égal au moment de la résultante des forces de pesanteur. Or celle-ci passe par  $G$ , donc  $\vec{\mathcal{M}}_{mg}^G = \vec{0}$ . Il reste uniquement le moment des réactions normales, ce qui conduit à

$$0 = N x - N' (a - x) \quad (3)$$

Etant donné que  $N > 0$  et  $N' > 0$ , on vérifie bien que les rouleaux  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$  appliquent respectivement des moments selon  $\vec{u}_y$  (sens positif) et selon  $-\vec{u}_y$ .

- c) La vitesse de glissement sur  $\mathcal{C}$  à l'instant  $t$  est la différence, au point de contact, entre la vitesse du point coïncident de la plaque et la vitesse du point coïncident du rouleau :  $\vec{v}_{g\mathcal{C}} = (\dot{x} - b\omega) \vec{u}_x$ .

A l'instant initial,  $\dot{x}(t=0) = 0$  donc  $\vec{v}_{g\mathcal{C}} = -b\omega \vec{u}_x \neq \vec{0}$ . **La plaque glisse sur le cylindre.**

- d) Les trois équations dynamiques ci-dessus dépendent de  $x(t)$  et de 4 forces de contact inconnues. On a donc besoin de deux équations scalaires supplémentaires, qui sont fournies par la loi de Coulomb du frottement solide. Comme il y a glissement sur  $\mathcal{C}$  au début du mouvement et que  $\vec{T}$  doit être opposée au glissement, on a

$$T = fN \quad (4)$$

D'autre part il n'y a pas de frottement sur  $\mathcal{B}$ , donc

$$T' = 0 \quad (5)$$

On peut maintenant éliminer les forces de contact pour trouver l'équation du mouvement.

Les Eqs. (2) et (3) conduisent à  $N = mg(1 - \frac{x}{a})$ , qui réinjecté dans les Eqs. (4) et (1) conduisent à

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{f \frac{g}{a}}$$

- e) Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ . Le second membre constant correspond à une position moyenne  $fg/\omega_0^2 = a$ . La solution est donc du type  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + a$ . D'après les conditions initiales  $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ , on obtient

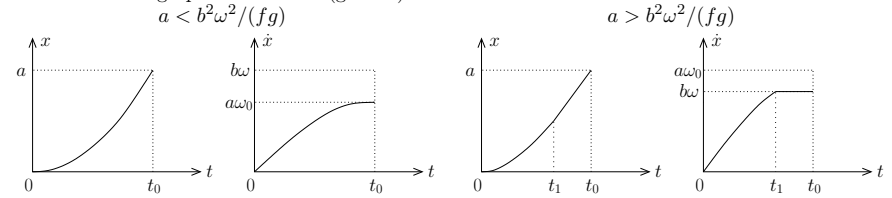
$$x(t) = a(1 - \cos(\omega_0 t))$$

- f) Le mouvement se poursuit ainsi à la condition qu'il y ait toujours glissement (et dans le même sens),

c'est-à-dire :  $\dot{x} - b\omega = a\omega_0 \sin(\omega_0 t) - b\omega < a\omega_0 - b\omega < 0$ , donc  $a\omega_0 < b\omega$  ou  $a < \frac{b^2 \omega^2}{fg}$ .

La plaque quitte alors le cylindre  $\mathcal{C}$  quand elle atteint  $x = a$ , c'est-à-dire à l'instant  $t_0 = T_0/4 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ .

Ceci conduit aux graphes ci-dessous (gauche).



Si au contraire  $a > b^2 \omega^2 / (fg)$ , alors à l'instant  $t_1$  tel que  $\dot{x}(t_1) = b\omega$ , soit  $t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{b\omega}{a\omega_0}\right)$ , le glissement cesse. On alors  $\dot{x} = b\omega$  donc un mouvement uniforme qui conduit à

$$x(t) = b\omega(t - t_1) + x(t_1).$$

Ce mouvement sans glissement existe à condition que  $|T| = -T < fN$ , ce qui donne en remplaçant par les relations précédentes :  $-T = -m\ddot{x} = 0 < fN = fmg(1 - \frac{x}{a}) \Leftrightarrow x < a$ . **Donc ce mouvement sans glissement persiste jusqu'à la chute en  $x = a$  à l'instant  $t_0$  tel que  $a = b\omega(t_0 - t_1) + x(t_1)$ , soit  $t_0 = t_1 + \frac{a}{b\omega} \cos(\omega_0 t_1)$ .** On obtient alors le graphe ci-dessus (droite).

- g) La condition sur  $a$  ci-dessus se réécrit sous la forme d'une condition sur  $\omega$  : si  $\omega > \omega_c = \sqrt{fga}/b = 8,9 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  on est dans la première situation, sinon dans la seconde.

i)  $\omega > \omega_c$ , donc on est dans la première situation. **La plaque quitte  $\mathcal{C}$  à l'instant  $t_0 = 0,35 \text{ s}$ .** ii)  $\omega < \omega_c$ , donc on est dans la seconde situation. La plaque cesse de glisser à l'instant  $t_1 = 0,14 \text{ s}$ , puis **quitte  $\mathcal{C}$  à l'instant  $t_0 = 0,47 \text{ s}$ .**

2. a) Les Eqs. (1) à (4) restent valables, et on modifie l'Eq. (5) par

$$T' = -fN' \quad (6)$$

Puis on élimine les forces de contact comme précédemment :  $m\ddot{x} = T + T' = f(N - N') = f(1 - \frac{x}{a-x})N = fmg(1 - \frac{2x}{a})$ , d'où

$$\ddot{x} + 2\omega_0^2 x = fg$$

- b) Cette fois la plaque oscille autour de la solution particulière  $\frac{a}{2}$ . Les conditions initiales conduisent à

$$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{2}\omega_0} \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)$$

Ce mouvement perdure tant que la condition de glissement est vérifiée, c'est-à-dire tant que  $|\dot{x}| < b\omega$ . Or  $\dot{x} = \dot{x}(0) \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)$  donc comme  $|\dot{x}(0)| < b\omega$ , **la condition de glissement est toujours vérifiée.**

- c) La mesure de la période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{2fg}}$  des oscillations de la plaque donne accès à  $f$  :  $f = \frac{2\pi^2 a}{gT^2}$ .

## II. Préparation d'une bouteille d'air comprimé

1. D'après le théorème d'équipartition de l'énergie (valable en mécanique classique), chaque terme quadratique de l'énergie microscopique d'une molécule vaut  $\frac{1}{2}k_B T$ . L'air peut être assimilé à un gaz parfait diatomique à 99%. Le gaz étant parfait, il n'y a pas d'énergie potentielle intermoléculaire. De plus il y a 7 termes quadratiques dans l'énergie d'une molécule mais le degré de liberté de vibration est gelé à température ambiante, donc il n'en reste que 5 effectifs. L'énergie interne vaut donc  $U = N \langle E_{e_{\text{micro}}} \rangle = \frac{5}{2} N k_B T = \frac{5}{2} n R T$ . Ainsi la capacité thermique vaut  $C_v = \frac{5}{2} n R$ . D'après la

relation de Mayer pour les gaz parfaits,  $C_p = C_v + nR$ , donc  $C_p = \frac{7}{2} nR$  et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,40$ .

2. On considère le système global constitué d'une part de l'air contenu dans la petite bouteille ( $n_0$  avant ouverture du robinet, et  $n$  après fermeture) et d'autre part de l'air contenu dans la grande bouteille ( $n_g$  avant ouverture du robinet, et  $n'_g$  après fermeture). La conservation de la matière s'écrit  $n_0 + n_g = n + n'_g$ . Combinée à l'équation d'état des gaz parfait on obtient  $(n_0 + n_g)RT_0 = (n + n'_g)RT_0 \iff p_0 V_p + p_g V_g =$

$p_F (V_p + V_g)$ . D'où la pression finale  $p_F = \frac{p_0 V_p + p_g V_g}{V_p + V_g} = \underline{195 \text{ bar}}$ , et la quantité dans la petite bouteille

$$n = \frac{p_F V_p}{RT_0} = \underline{3,20 \text{ mol}}.$$

3. a) La transformation est brutale, on ne peut considérer qu'elle est proche d'une succession d'états d'équilibres, donc **elle n'est pas quasi-statique**.

- b) Système : les  $n$  moles d'air présentes dans la petite bouteille à la fin de l'opération, et occupant un volume  $V$  avant l'ouverture. Le Premier Principe (PP) s'écrit  $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_F - T_0) = W = p_g V$ , or  $p_g V = nRT_0$ . On en déduit  $T_F = \gamma T_0 = \underline{410,2 \text{ K}}$ .

- c) Ceci conduit à  $n = \frac{p_g V_p}{RT_F} = \underline{2,35 \text{ mol}}$ . L'échauffement réduit donc nettement la quantité d'air stockée par rapport au cas isotherme.

4. a) Le système est toujours constitué des  $n'$  moles d'air contenues la petite bouteille à la fin du remplissage. On note  $n_0$  les moles d'air contenues initialement dans la petite bouteille. Le PP s'écrit maintenant :  $\Delta U = \frac{n'R}{\gamma-1} (T_F - T_0) = p_g V' = (n' - n_0)RT_0$ , que l'on ré-écrit  $n'RT'_F = \gamma n'RT_0 - (\gamma-1)n_0RT_0$ . En injectant l'état final  $p_g V_p = n'RT'_F$  on obtient  $p_g V_p \left(1 - \gamma \frac{T_0}{T'_F}\right) = -(\gamma-1)p_0 V_p$ , ce qui conduit

$$\text{à } T'_F = \gamma T_0 \left(1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_g}\right)^{-1} = \underline{409,4 \text{ K}}.$$

- b) On a bien  $T'_F \rightarrow \gamma T_0 = T_F$  lorsque  $\frac{p_0}{p_g} \rightarrow 0$ . Il y a heureusement continuité entre les deux calculs.

- c) L'écart relatif entre les deux résultats est  $\frac{T'_F - T_F}{T_F} = \frac{T'_F}{T_F} - 1 = \left(1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_g}\right)^{-1} - 1 \approx -(\gamma-1) \frac{p_0}{p_g} = -2 \times 10^{-3} = \underline{-0,2\%}$ . C'est relativement faible compte-tenu du peu de précision requis ici.

5. a) PP appliqué au système global :  $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = W + Q = 0 + 0$  car les parois de l'enceinte globale sont rigides, et la transformation est adiabatique. Ceci conduit à  $n_1 R(T_1 - T_0) + n_2 R(T_2 - T_0) = 0$  d'où  $n_1 T_1 + n_2 T_2 = (n_1 + n_2)T_0$ .

- b) En considérant l'équation précédente et le fait que  $p_1 = p_2 = p_F$  (équilibre mécanique), il manque 4 équations pour trouver les 5 inconnues ( $n_1, T_1, n_2, T_2, p_F$ ).

En injectant les deux équations d'états finaux  $p_F V_p = n_1 R T_1$  et  $p_F V_g = n_2 R T_2$  et la conservation de la matière au cours de la transformation,  $n_1 + n_2 = (p_0 V_p + p_g V_g)/(RT_0)$  dans l'équation du 5.a), on obtient  $p_F (V_p + V_g) = p_0 V_p + p_g V_g$ . Ceci conduit au même résultat qu'en 2. :

$$p_1 = p_2 = p_F = \frac{p_0 V_p + p_g V_g}{V_p + V_g} = \underline{195 \text{ bar}}.$$

La 5ème équation est le PP pour l'un des deux sous-systèmes. La pression dans la grande bouteille

n'étant plus constante on ne peut pas appliquer la méthode précédente. Par contre sous l'hypothèse d'une transformation adiabatique quasi-statique du système  $n_2$ , on peut appliquer la loi de Laplace (version intégrée du PP) :  $p_F^{1-\gamma} T_2^\gamma = \text{constante} = p_g^{1-\gamma} T_0^\gamma$ . Ceci donne  $T_2 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_F}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ , et  $n_2 = \frac{p_F V_g}{RT_2} = \frac{p_F V_g}{RT_0} \left(\frac{p_0}{p_F}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ . Par conservation de la matière on obtient  $n_1 = (p_0 V_p + p_g V_g)/(RT_0) - n_2$ ,

d'où après reformulation :  $n_1 = \frac{p_F}{RT_0} \left(V_p + V_g - V_g \left(\frac{p_0}{p_F}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) = \underline{2,30 \text{ mol}}$ .

Finalement on en déduit  $T_1 = \frac{p_F V_p}{n_1 R}$ , d'où  $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(\frac{p_0}{p_F}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} = \underline{407,8 \text{ K}}$ .

- c) On souhaite retrouver le résultat du 4. en faisant  $\frac{V_p}{V_g} \rightarrow 0$ . En réinjectant l'expression de  $p_F$  on obtient :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(\frac{1 + \frac{V_p}{V_g}}{1 + \frac{p_0 V_p}{p_g V_g}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} \approx T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(1 + \frac{V_p}{V_g} \left(1 - \frac{p_0}{p_g}\right)\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1} \\ &\approx T_0 \left(1 + \frac{V_g}{V_p} - \frac{V_g}{V_p} \left(1 + \frac{V_p}{V_g} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left(1 - \frac{p_0}{p_g}\right)\right)\right)^{-1} = T_0 \left(1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \left(1 - \frac{p_0}{p_g}\right)\right)^{-1} \\ &= \gamma T_0 \left(1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_g}\right)^{-1} = T'_F \end{aligned}$$

- d) On obtient un écart relatif  $\frac{T_1}{T'_F} - 1 = \underline{-0,4\%}$

### III. Etude de compresseurs

#### 1. Compresseur à un étage

- Les transformations sont toutes quasi-statiques, donc l'équilibre mécanique est toujours établi de part et d'autre du piston. En notant  $s$  la section du cylindre, le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué au piston dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit donc  $0 = p_0 s - p_0 s + F_{op}$ . Donc  $F_{op} = 0$ , et donc  $\boxed{W_1 = 0}$ .
  - Il s'agit d'une compression adiabatique du système constitué des  $n$  moles d'air aspirées, donc  $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0) = W + Q = W = -p_0 (V_1 - V_M) + W_2$ , le premier terme de travail étant fourni par l'atmosphère à droite du piston. D'autre part,  $p_0 V_M = nRT_0$  et  $p_f V_1 = nRT_f$  donc on obtient  $\boxed{W_2 = \frac{p_f V_1 - p_0 V_M}{\gamma - 1} + p_0 (V_1 - V_M)}$ .
  - De nouveau on suppose que la somme des forces appliquées au piston est nulle à tout instant, d'où  $F_{op} = p_f - p_0$ , ce qui conduit à un travail  $\boxed{W_3 = (p_f - p_0) V_1}$ .
- La compression de la phase 2 est adiabatique et quasi-statique donc le gaz étant parfait elle obéit à la loi de Laplace :  $\boxed{V_1 = V_M \left( \frac{p_0}{p_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}$ .
- On obtient  $W_{op} = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{p_f V_1 - p_0 V_M}{\gamma - 1} + p_f V_1 - p_0 V_M = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_f V_1 - p_0 V_M)$ . On observe que le travail global de l'atmosphère sur un aller-retour est nul. En remplaçant  $V_1$ , on obtient

$$\boxed{W_{op} = \frac{\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_f}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right)} = 409 \text{ J.}$$

#### 2. Compresseur à deux étages

- Le travail fourni par l'opérateur dans le premier cylindre correspond à celui calculé précédemment en  $p_f$  en  $p_1$  :  $\frac{\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$ .  
Quant à celui fourni dans le second cylindre, on le calcule selon le même raisonnement (on note  $V_1'''$  le volume lorsque la soupape d'échappement s'ouvre) :

$$-(p_1 - p_0) V_1'' + \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_0) - p_0 (V_1'' - V_1''') + (p_f - p_0) V_1''' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_f V_1''' - p_0 V_1'') = \frac{\gamma nRT_0}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_f}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$$

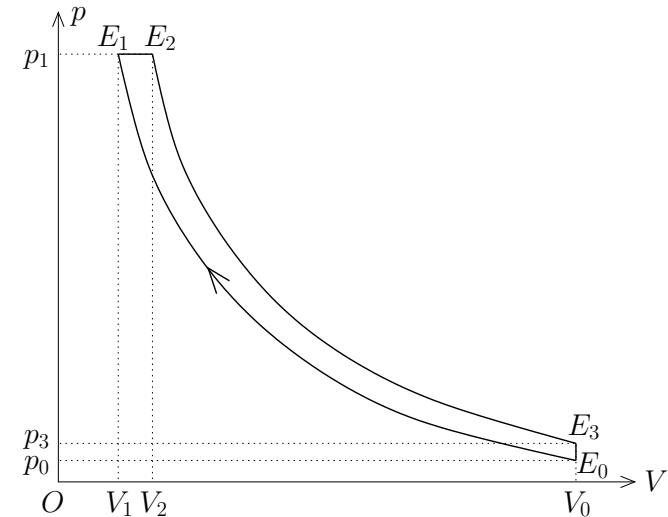
Il obéit donc aussi au même type de loi. Comme  $nRT_0 = p_0 V_M$ , on obtient finalement

$$\boxed{W_{op2} = \frac{\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} + \left( \frac{p_f}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 2 \right)}$$

- Les pressions  $p_0$  et  $p_f$  étant fixées, on trouve après dérivation que  $W_{op2}$  est minimal pour  $\boxed{p_1 = \sqrt{p_0 p_f}} = 3,87 \times 10^5 \text{ Pa}$ .
- Les taux de compression valent alors  $\boxed{\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_f}{p_0} = \sqrt{\frac{p_f}{p_0}}} = 3,87$ .
  - On obtient alors  $\boxed{W_{op2} = \frac{2\gamma p_0 V_M}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_f}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right)} = 331 \text{ J} < W_{op}$ . Ainsi, l'introduction d'un échangeur et d'un second étage permet d'améliorer l'efficacité du dispositif, car il requiert un travail plus faible pour l'opérateur. On devine qu'on peut encore améliorer le rendement en ajoutant d'autres étages.

### IV. Cycle de transformations d'un gaz parfait

- La loi de Laplace conduit à  $\boxed{V_1 = V_0 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{nRT_0}{p_0} \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2,87 \text{ L}}$ , avec  $\boxed{V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 24,3 \text{ L}}$ .  
De même la température s'en déduit :  $\boxed{T_1 = T_0 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma} - 1} = 690 \text{ K}}$ .
- L'échauffement étant isobare, le premier principe s'écrit à l'aide de l'enthalpie :  $\Delta H = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = Q$ .  
Ceci conduit à  $\boxed{T_1 = T_1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma nR} Q = 1,03 \times 10^3 \text{ K}}$ .  
La pression étant constante, la loi du gaz parfait conduit à  $\boxed{V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1 = 4,3 \text{ L}}$ .
- De nouveau on peut appliquer la loi de Laplace, ce qui conduit à  $\boxed{P_3 = P_1 \left( \frac{V_2}{V_0} \right)^\gamma = 1,76 \text{ bar}}$ , et  $\boxed{T_3 = T_2 \left( \frac{V_2}{V_0} \right)^{\gamma - 1} = 516 \text{ K}}$ .
- La transformation est isochore donc le travail reçu est nul. Le premier principe se réduit à  $\Delta U = Q'$ , d'où  $\boxed{Q' = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_0 - T_3) = -4,64 \text{ kJ}}$ .
- Le Cycle complet correspond au graphe ci-dessous :



L'aire algébrique à l'intérieur de la courbe du cycle est positive car le cycle est parcouru dans le sens horaire. **Donc le travail est négatif, le cycle est moteur.**

- Au cours du cycle la variation d'énergie interne est nulle (retour à l'état initial. Le premier principe conduit donc à  $0 = W + Q + Q'$ , d'où  $\boxed{W = -Q - Q'} = -5,36 \text{ kJ}$ .