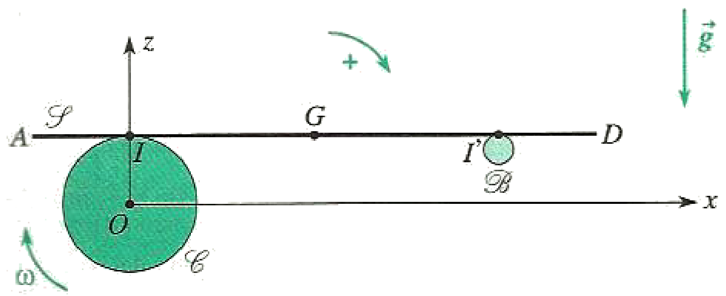
MECANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

Le devoir comporte quatre exercices indépendants pouvant être traités dans l'ordre de votre choix (à indiquer clairement !).
En mécanique comme en thermodynamique, on veillera à toujours définir soigneusement le système auquel on applique une loi.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Mouvement d'une plaque sur un ou deux cylindres

On considère une plaque homogène carrée $\mathcal{S}$ de masse m, de côté $2a$, d'épaisseur négligeable, de sommets A, A', D', D, et de centre d"inertie G. Les mouvements de cette plaque sont étudiés dans un référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le champ de pesanteur a une intensité notée g. Pour les applications numériques on prendra $a = 0,2\,\text{m}$ et $g = 9,8\,\text{m.s}^{-2}$.



1. La plaque $\mathcal{S}$ est posée sans vitesse initiale sur une barre $\mathcal{B}$ et sur un cylindre $\mathcal{C}$ de rayon b. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont des axes parallèles, horizontaux, de telle sorte que la plaque soit horizontale ; le côté AA' restant parallèle à ces axes.
Le cylindre est animé d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire $\omega > 0$. Le contact entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ est sans frottements, alors que celui entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f.
On prendra $II' = a$, $IG = x$ avec $x(t = 0) = 0$, $b = 0,1\,\text{m}$ et $f = 0,4$.
   a) Appliquer et projeter le théorème de la résultante cinétique (TRC) pour la plaque dans $\mathcal{R}$. On notera respectivement (N, T) et (N', T') les composantes des forces de contact exercées par les rouleaux.
   b) Appliquer et projeter le théorème du moment cinétique scalaire en G dans le référentiel barycentrique (on admet que cela s'écrit comme dans $\mathcal{R}$, si ce n'est que G peut être considéré fixe).
   c) La plaque glisse-t-elle sur le rouleau au début ?
   d) En déduire l'équation du mouvement en $x(t)$.
   e) Résoudre cette équation et donner la loi horaire $x(t)$.
   f) A quelle condition sur a ce mouvement se poursuit-il tel quel ? Sinon qu'advient-il ? On tracera l'allure de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ dans chaque cas.
   g) Dans les deux cas suivants,
$$i)\ \omega = 15\,\text{rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad ii)\ \omega = 5\,\text{rad.s}^{-1},$$
   la plaque va-t-elle quitter le cylindre $\mathcal{C}$ et si oui à quelle date ?

2. La barre $\mathcal{B}$ est maintenant remplacée par un cylindre $\mathcal{C}'$ identique à $\mathcal{C}$, tournant à la même vitesse mais en sens inverse. A l'instant initial $t = 0$ on place la plaque avec les conditions suivantes : $x(0) = \frac{a}{2}$ et $0 < \dot{x}(0) < b\omega$.
   a) Etablir la nouvelle équation du mouvement.
   b) En déduire la loi horaire $x(t)$.
   c) Montrer comment cette expérience permet de déterminer le coefficient f.

II. Préparation d'une bouteille d'air comprimé

On étudie un système de gonflage d'urgence pour une bouée, constitué d'une petite bouteille de faible volume sous pression. Cette petite bouteille de volume $V_p = 0,40\,\mathrm{L}$ contient initialement de l'air à température $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ et sous la pression p_0. Afin de la remplir d'air comprimé on la relie à une autre bouteille, plus grande, à l'aide d'un tuyau muni d'un robinet. La grande bouteille de volume $V_g = 15,0\,\mathrm{L}$ contient de l'air sous haute pression ($p_g = 200\,\mathrm{bars}$) à la même température T_0.

L'air est considéré comme un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, de coefficient γ constant et égal à 1,40. On rappelle que la constante des gaz parfaits vaut $R = 8,314\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.

On ouvre le robinet et on attend que l'équilibre mécanique soit atteint avant de le refermer.

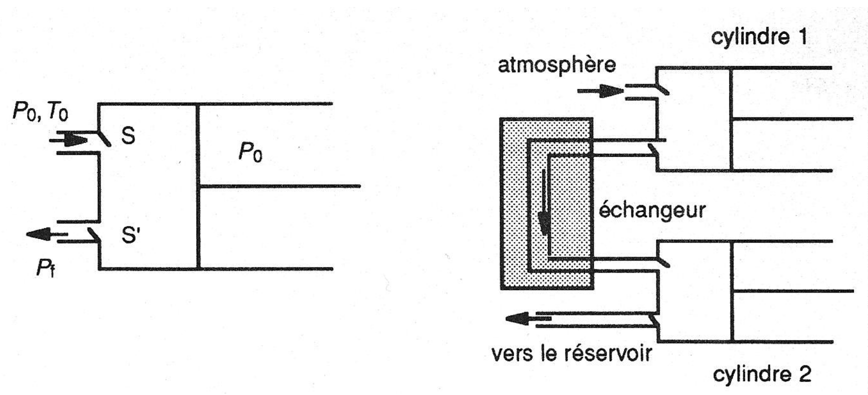
1. Justifier succintement que $\gamma = 1,40$.
2. On suppose tout d'abord que le remplissage est isotherme et que $p_0 = 1,0\,\mathrm{bar}$. Calculer la pression finale et le nombre de moles du gaz contenu dans la petite bouteille.
3. En fait quand on effectue l'opération on constate que la température de la petite bouteille s'élève fortement (il est parfois impossible de la tenir à mains nues) et que le remplissage s'effectue très rapidement.
   Pour en tenir compte on suppose maintenant que la transformation est adiabatique.
   Pour simplifier les calculs et compte tenu de la valeur numérique trouvée au 2., on suppose dans un premier temps que le volume de la grande bouteille est assez grand pour que la pression et la température y restent constantes pendant le remplissage de la petite bouteille, et que la petite bouteille est initialement vide ($p_0 = 0$).
   a) Le remplissage est-il quasi-statique au niveau de la petite bouteille ?
   b) Calculer la température T_F de la petite bouteille à la fin du remplissage en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système à préciser.
   c) En déduire le nombre de moles n du gaz contenu dans la petite bouteille et comparer au 2..
4. On se place maintenant sous les mêmes hypothèses que dans la question précédente sauf que l'on ne suppose plus que la petite bouteille est initialement vide ($p_0 = 1\,\mathrm{bar}$).
   a) Etablir l'expression de la température finale T'_F de l'air contenu dans la petite bouteille. On notera n' le nombre de moles présentes dans la bouteille à la fin du remplissage (dont on ne demande pas la valeur numérique).
   b) Retrouve-t-on les résultats du 3. par passage à la limite ?
   c) La correction apportée par rapport au résultat du 3. est-elle numériquement importante ?
5. Tout en supposant la transformation adiabatique, on tient compte cette fois ci de la valeur finie du volume de la grande bouteille et on ne suppose plus la petite bouteille initialement vide ($p_0 = 1\,\mathrm{bar}$).
   On suppose de plus que le gaz restant dans la grande bouteille subit une transformation quasi-statique.
   On note (n_i, T_i, p_i) les nombre de moles, température et pression dans l'état final pour la petite bouteille ($i = 1$) et pour la grande bouteille ($i = 2$).
   a) Obtenir une première relation en appliquant le premier principe au système global constitué de l'air contenu dans les deux bouteilles.
   b) Etablir les expressions de n_1, T_1 et p_1 (dans l'ordre de votre choix).
   c) Retrouve-t-on les résultats du 4. par passage à la limite ?
   d) Comparer numériquement les résultats. La correction est-elle importante ?

III. Etude de compresseurs

On modélise le fonctionnement d'un compresseur de la façon suivante : il prélève de l'air dans l'atmosphère à la pression p_0 et à la température T_0, le comprime de façon adiabatique jusqu'à la pression finale p_f puis le refoule à pression constante dans un réservoir d'air comprimé dont la pression est toujours égale à p_f.

On suppose dans ce problème que toutes les transformations sont quasi-statiques. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique et l'on donne :

- $p_0 = 1,0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$
- $T_0 = 295\,\mathrm{K}$
- $p_f = 15 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$
- $R = 8,31\,\mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$
- $\gamma = 1,40$



1. Compresseur à un étage

Le compresseur de gauche est constitué d'un cylindre d'axe horizontal, d'un piston pouvant coulisser sans frottement et de deux soupapes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.
On peut décomposer un aller et retour du piston en trois phases (en partant du piston au contact des soupapes) :
— phase 1 : admission isobare de n moles d'air prélevées dans l'atmosphère et occupant un volume V_M, la soupape d'admission $\mathcal{S}$ étant ouverte et la soupape d'échappement $\mathcal{S}'$ étant fermée ;
— phase 2 : compression adiabatique de p_0 à p_f, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ étant fermées ;
— phase 3 : refoulement isobare des n moles d'air à la pression p_f vers le réservoir, $\mathcal{S}$ étant fermée et $\mathcal{S}'$ ouverte.
Le volume d'admission (volume maximal à l'intérieur du cylindre) est $V_M = 1,0\,\mathrm{L}$.

1. On suppose que la face droite du piston est soumise à la pression atmosphérique p_0. Pour les raisonnements, on note F_{op} la composante algébrique de la force horizontale exercée par l'opérateur qui déplace le piston (positive si la force est vers la droite). On note aussi V_1 le volume du gaz dans le cylindre lorsque la soupape $\mathcal{S}'$ s'ouvre.
   a) Que vaut la force F_{op} au cours de la phase 1 ? En déduire le travail W_1 fourni par l'opérateur qui déplace le piston au cours de la phase 1.
   b) En utilisant le premier principe, exprimer le travail W_2 fourni par l'opérateur au cours de la phase 2, en fonction des variables V_M, V_1, p_0, p_f et γ. On pensera à retrancher l'effet de l'atmosphère extérieure.
   c) Exprimer le travail W_3 fourni par l'opérateur au cours de la phase 3, en fonction de V_1, p_0 et p_f.
2. Exprimer V_1 en fonction de V_M, p_0, p_f et γ.
3. En déduire l'expression du travail W_{op} fourni par l'opérateur qui déplace le piston pour un aller et retour complet. On exprimera le résultat en fonction de V_M, p_0, p_f et γ. Faire l'application numérique.

2. Compresseur à deux étages

Le compresseur de droite de la figure comporte deux cylindres et un échangeur de chaleur.
Les n moles d'air prélevées dans l'atmosphère sont successivement :
— admises à la pression constante p_0 dans le cylindre 1 ;
— comprimées de façon adiabatique jusqu'à la pression p_1 ;

— refoulées à la pression constante p_1 dans un échangeur de chaleur où elles sont refroidies à pression constante jusqu'à la température T_0 ;
— admises à la pression constante p_1 dans le cylindre 2 ;
— comprimées de façon adiabatique jusqu'à la pression p_f ;
— refoulées à la pression p_f vers le réservoir d'air comprimé.

La valeur de la pression intermédiaire p_1 est fixée par les réglages du compresseur. On note V_1' le volume des n moles d'air dans le cylindre 1 lorsque la soupape $\mathcal{S}'$ s'ouvre. On note V_1'' le volume de ces mêmes n moles d'air entrant dans le cylindre 2 à la température T_0. La course du piston 2 est donc limitée à un volume maximal V_1''.

4. En adaptant le raisonnement de la section précédente, établir l'expression du travail $W_{\text{op}\,2}$ fourni par l'opérateur qui déplace les deux pistons pour transférer les n moles d'air de l'atmosphère au réservoir.
5. Déterminer la valeur de p_1 pour laquelle $W_{\text{op}\,2}$ passe par un minimum.
6. Pour cette valeur de p_1, déterminer :
   a) les taux de compression $\frac{p_1}{p_0}$ et $\frac{p_f}{p_1}$ des deux cylindres ;
   b) le travail $W_{\text{op}\,2}$ et faire l'application numérique. Comparer $W_{\text{op}\,2}$ à W_{op}.

IV. Cycle de transformations d'un gaz parfait

On considère $n = 1,00\,\text{mol}$ de gaz parfait occupant un volume V_0 sous la pression $p_0 = 1,00\,\text{bar}$ et à la température $T_0 = 293\,\text{K}$. Les capacités calorifiques molaires de ce gaz sont constantes. Le coefficient γ l'est donc aussi et vaut 1,40. On rappelle la constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

A partir de l'état initial (p_0, T_0, V_0) noté E_0, ce système subit quatre transformations qui le ramènent à l'état E_0, en passant par les états E_1, E_2, et E_3. Pour chaque question, on effectuera d'abord un calcul littéral puis une application numérique.

1. Le gaz subit d'abord une compression adiabatique quasi-statique jusqu'à la pression $p_1 = 20\,\text{bar}$. Pour cet état E_1, calculer le volume V_1 et la température T_1.
2. Lors de l'échauffement à pression constante qui l'amène de l'état E_1 à l'état E_2 ($p_2 = p_1$, V_2, T_2), le gaz reçoit la quantité de chaleur $Q = 10\,\text{kJ}$. Calculer V_2 et T_2.
3. Le gaz subit ensuite une détente adiabatique quasi-statique jusqu'au volume initial V_0. Le gaz se trouve alors dans l'état E_3 (p_3, $V_3 = V_0$, T_3). Calculer P_3 et T_3.
4. Le retour à l'état initial se fait en refroidissant le gaz à volume constant, jusqu'à la température T_0. Calculer la quantité de chaleur Q' reçue par le gaz lors de cette transformation.
5. Dessiner l'allure du cycle dans un diagramme de Clapeyron. On utilisera l'échelle de $0,5\,\text{cm}$ pour $1\,\text{bar}$ et pour $2\,\text{dm}^3$.
   Le cycle est-il moteur ?
6. Calculer le travail W reçu par le gaz au cours du cycle, ainsi que le rendement $\eta = \left|\frac{W}{Q}\right|$.

* * * Fin de l'épreuve * * *