MÉCANIQUE

I. S'échapper de la surface de la Terre

1. L'énergie mécanique est conservée entre le décollage et un point éloigné de l'attraction terrestre d'énergie positive ou nulle pour être dans un état lié : $E_m = \frac{1}{2}mv_\ell^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_\ell^2 - mg_0R_T = 0$. D'où $\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0R_T}} = \underline{11,2\,\mathrm{km.s^{-1}}}$.
2. v_ℓ ne dépend pas ici de m. Mais si l'on tient compte des forces de frottement dans l'atmosphère, alors la masse ne se simplifie plus et contribue au résultat.
3. a) Le centre de la Terre peut être considéré immobile i) si le mouvement considéré est court par rapport à la période de révolution de la Terre autour du Soleil, et ii) si le satellite est très léger par rapport à la Terre, ce qui est le cas des satellites artificiels.

   b) On applique le Théorème du Moment Cinétique (TMC) au point M en O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$. La force étant centrale, on obtient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}^O}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{OM} \wedge (-)\mathcal{G}\,M_Tm\,\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{L}^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$$

   A tout instant, $\overrightarrow{OM}$ est donc dans le plan orthogonal au vecteur constant $\vec{L}^O$ passant par O. Le mouvement est donc inscrit dans ce plan.

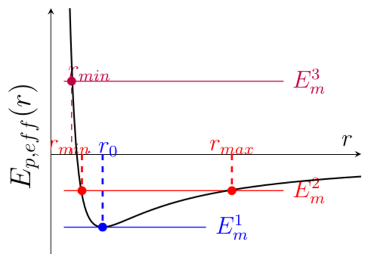
   c) Le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est conservative car son travail élémentaire vérifie :

$$\delta W = (-)\mathcal{G}\,M_Tm\,\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (-)\mathcal{G}\,M_Tm\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\mathrm{d}E_p \quad \text{avec} \quad \boxed{E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{M_Tm}{r}}$$

   d) On obtient dans le plan du mouvement et en coordonnées cylindriques $\vec{L}^O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$ donc $L = mr^2|\dot{\theta}|$. L'énergie s'écrit alors $E_m = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}) + E_p(r) = \frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r)$ avec $\boxed{E_{p\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)}$.

   e) On obtient l'allure suivante.

   Si le satellite est dans un état de diffusion, la trajectoire est hyperbolique ($E_m > 0$) ou parabolique ($E_m = 0$). Sinon l'état est lié. La trajectoire est alors soit circulaire de rayon r_0 ($E_m = E_{p\text{eff},\min}(r) = E_{p\text{eff}}(r_0)$), soit elliptique ($E_m < 0$ non minimale, donc $E_m > E_{p\text{eff}}(r_0)$).
   Dans tous les cas, la trajectoire a pour foyer le point O centre de force.



   f) En $r = r_{\min}$ ou $r = r_{\max}$ on a $\dot{r} = 0$, donc $E_m = E_{p\text{eff}}(r_{\min,\max}) \Leftrightarrow r^2 + \frac{\mathcal{G}M_Tm}{E_m}\,r - \frac{L^2}{2mE_m} = 0$. Ce trinôme conduit à $r_{\min} + r_{\max} = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{E_m}$ et

$$\boxed{r_{\min,\,\max} = \frac{\mathcal{G}\,M_Tm}{2E_m}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2E_m}{\mathcal{G}^2M_T^2m^3}}\right)} \quad \text{avec} \quad E_m < 0\,.$$

   g) On obtient $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{R_T}}$ et on $\boxed{L = mR_Tv_0\,|\sin\alpha|}$.

   h) La forme de la trajectoire de l'ellipse en polaires est $r(\theta) = \frac{p}{1+e\,\cos(\theta-\theta_0)}$. On en tire $r_{\min} = p/(1+e)$ et $r_{\max} = p/(1-e)$ d'où $r_{\min} + r_{\max} = \frac{2p}{1-e^2}$. D'après la question 3.f), on a aussi $r_{\min} + r_{\max} = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{E_m}$.
   On en déduit $e = \sqrt{1 + \frac{2pE_m}{\mathcal{G}M_Tm}}$.
   On simplifie ce résultat en introduisant v_0 et v_ℓ. On note d'abord que $E_m = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_\ell^2)$, puis que $p = 2R_T\,\frac{v_0^2}{v_\ell^2}\,\sin^2\alpha$. Finalement on obtient $\boxed{e = \sqrt{1 + 4\,\frac{v_0^2}{v_\ell^2}\left(\frac{v_0^2}{v_\ell^2} - 1\right)\,\sin^2\alpha}} < 1$.

   i) La trajectoire étant périodique (fermée), l'objet retrounera forcément sur Terre sauf si $\boxed{\alpha = \pm\frac{\pi}{2}}$.
   Par conséquent, le point de départ est un extremum de distance au centre de la Terre. Il faut donc que ce soit le péricentre, d'où une vitesse initiale qui garantisse au moins une trajectoire circulaire (1ère vitesse cosmique v_1) ou supérieure pour garantir un grand axe a supérieur au rayon terrestre (car $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{2a}$ pour une ellipse et E_m augmente avec v_0). Ainsi on souhaite $v_0 \geq v_1$ avec $E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{R_T} = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{2R_T}$. D'où $\boxed{v_0 \geq v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{g_0R_T}} = \underline{7,9\,\mathrm{km.s^{-1}}}$.

II. Mesure de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$

1. La mesure du poids du corps grâce au ressort donne accès au champ de gravitation en surface $g_0 = \mathcal{G}M_T/R_T^2$ et non directement à $\mathcal{G}$ si on ne connaît pas M_T ou R_T. L'utilisation du pendule de torsion permet de ne pas avoir à prendre en compte l'attraction terrestre.
2. a) $[C] = [C\theta] = [M_r] = \boxed{ML^2T^{-2}}$

   b) $[I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}] = [\lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}] = [C\theta] = [C]$, ce qui conduit à $\boxed{[I] = ML^2}$ et $\boxed{[\lambda] = ML^2T^{-1}}$. Le premier terme est la **dérivée temporelle du moment cinétique du pendule selon l'axe** $0z$. Le second terme est l'**opposé du moment résultant du couple des forces de frottement**.

   c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. On cherche la solution générale comme une combinaison linéaire de deux solutions de la forme e^{rt}, ce qui conduit à l'équation caractéristique $r^2 + 2\xi r + \omega_0^2 = 0$ avec $\boxed{\xi = \frac{\lambda}{2I}}$ et $\boxed{\omega_0^2 = \frac{C}{I}}$. Le pendule oscillera si les racines sont complexes, donc si le discriminent est négatif, $\boxed{\xi < \omega_0 \Leftrightarrow \lambda < 2\sqrt{CI}}$.
   Les racines sont $r = \xi \pm i\,\omega$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$ la pseudo-pulsation. La solution s'écrit $\theta(t) = \theta_m\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega t + \varphi)$, avec le temps caractéristique du régime transitoire $\boxed{\tau = \frac{1}{\xi} = \frac{2I}{\lambda}}$. D'où la pseudo-période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi I}{\sqrt{4CI - \lambda^2}}}$. L'équation étant sans second membre, le régime permanent est nul, donc $\boxed{\theta(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \theta_\infty = 0}$.
3. a) L'équation comporte un moment résultant supplémentaire au second membre : $I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + C\theta = M_g(\theta)$ ce qui conduit à l'équilibre à $\boxed{C\theta_e = M_g(\theta_e)}$ (somme nulle des moments résultants).

   b) *Remarque : la définition de l'orientation de θ dans le second schéma de la figure 2 est pour le moins inhabituelle... elle correspond à un repère indirect ! (pour que l'équation différentielle soit cohérente). Nous devons projeter les moments selon $-\vec{u}_z$ et non $\vec{u}_z$ pour retrouver une quantité positive...*
   On suppose $\theta = 0$:

$$M_{g1} = 2\times(-\vec{u}_z)\,.\,\left(\overrightarrow{OA_2} \wedge \frac{\mathcal{G}Mm}{A_2B_2^3}\,\overrightarrow{A_2B_2}\right) = 2\times(-\vec{u}_z)\,.\,\left(d\vec{u}_y \wedge \frac{\mathcal{G}Mm}{R^3}\,R\vec{u}_x\right) \quad \text{d'où} \quad M_{g1} = \frac{2d\mathcal{G}Mm}{R^2}$$

$$M_{g2} = 2\times(-\vec{u}_z)\,.\,\left(\overrightarrow{OA_1} \wedge \frac{\mathcal{G}Mm}{A_1B_2^3}\,\overrightarrow{A_1B_2}\right) = 2\times(-\vec{u}_z)\,.\,\left(-d\vec{u}_y \wedge \frac{\mathcal{G}Mm}{(4d^2+R^2)^{3/2}}\,(2d\vec{u}_y + R\vec{u}_x)\right) \quad \text{d'où}$$

$M_{g2} = -\frac{2dR\mathcal{G}Mm}{(4d^2+R^2)^{3/2}}$. Le moment complet est donc $\boxed{M_g = \frac{2d\mathcal{G}Mm}{R^2}\left(1 - \frac{R^3}{(4d^2+R^2)^{3/2}}\right)}$.

c) On obtient $\boxed{\theta_e = M_g/C} = \underline{1,1\times 10^{-2}\,\text{rad}} = \underline{0,67°}$. Une mesure directe d'une si petite déviation est possible mais difficile à réaliser, ce qui explique de Cavendish ait utilisé un pendule beaucoup plus large.

4. a) D'après la loi de la réflexion : $\boxed{\alpha = 2\theta_e}$.

   b) On a $e = L\tan\alpha \approx 2L\theta_e$ d'où $\boxed{L = e/(2\theta_e)} = \underline{0,4\,\text{m}}$. L'expérience est donc réalisable à l'échelle d'une paillasse.

III. Temps d'effondrement d'une étoile sous l'effet de la gravitation

1. La distribution de masse est à **symétrie sphérique**, donc la force s'exerçant sur chaque particule est **centrale de centre** O. Les particules vont donc être attirées vers le centre. En l'absence de toute autre force (pression...) **l'équilibre correspond à toutes les particules au centre**.
2. D'après la question 3.b), le moment cinétique en O de M dans le référentiel centré sur l'étoile est conservé et nul puisque la vitesse initiale est nulle. Ainsi, à tout instant $m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, donc on a $\vec{v}$ parallèle à $\overrightarrow{OM}$ à tout moment. Le mouvement est donc rectiligne le long d'un rayon vecteur de direction fixée.
   Remarque : on pouvait biensûr répondre en utilisant le PFD.
3. D'après la question 3.c), la particule de masse m est un système conservatif et son énergie mécanique vaut $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_s m}{r}$. On l'évalue à $t=0$: $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{R_s}$. Ceci conduit à $\boxed{v^2 = 2\mathcal{G}M_s\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right)}$.
   Cette expression a le défaut de conduire à une **vitesse infinie** lorsque $r \to 0$, ce qui est interdit par la théorie de la relativité.
4. La vitesse étant radiale, elle s'écrit $\dot{r} = -\sqrt{2\mathcal{G}M_s\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right)}$. En séparant les variables on peut écrire le temps d'éffondrement sous la forme d'une intégrale :

$$t_{\text{eff}} = \int_0^{t_{\text{eff}}} \mathrm{d}t = \int_{R_s}^{0} \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{G}M_s}} \int_0^{R_s} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r - 1/R_s}} = \sqrt{\frac{R_s^3}{2\mathcal{G}M_s}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{R_s^3}{2\mathcal{G}M_s}}\,A}$$

5. En injectant $M_s = \rho\,\frac{4\pi}{3}\,R_s^3$ et le résultat du formulaire $A = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\boxed{t_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32\mathcal{G}\rho}}}$. Une étoile s'éffondre d'autant plus vite qu'elle est dense.
6. Ceci conduit pour le Soleil à $t_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\pi^2 R_s^3}{8\mathcal{G}M_s}} = \underline{29\,\text{min}}$. Le temps de vie du Soleil étant de l'ordre de 10 milliards d'années, il manque quelque chose d'important dans le modèle : la force de pression, qui s'oppose à l'attraction gravitationnelle via un équilibre hydrostatique.