MECANIQUE

Ce problème traite de divers aspects de la gravitation.
Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

CALCULATRICES AUTORISÉES

Données

Masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre : $R_T = 6,40 \times 10^3$ km
Masse du Soleil : $M_\odot = 1,99 \times 10^{30}$ kg
Rayon du Soleil : $R_\odot = 6,95 \times 10^5$ km
Constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Champ de gravitation terrestre de surface : $g_0 = 9,8\,$m.s^{-2}

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

I. S'échapper de la surface de la Terre

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer des hommes, des satellites et des instruments de mesure hors de l'atmosphère soit pour observer la Terre d'en "haut" soit pour observer l'espace. Cette partie a pour but d'aborder succinctement la mise en orbite autour de la Terre. On travaillera dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$, qui sera considéré galiléen.

1. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est la vitesse minimale avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle terrestre. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à un objet M de masse m entre deux états bien choisis, déterminer v_ℓ. On l'exprimera en fonction du champ de gravitation terrestre de surface g_0, supposé uniforme. Calculer v_ℓ numériquement.
2. La vitesse de libération dépend-elle de la masse de l'objet M ? En pratique, est-ce effectivement le cas ? Pourquoi ?
3. On veut maintenant étudier les trajectoires possibles des satellites que l'Homme envoie dans l'espace. Pour cela, on suppose que le satellite est un point matériel M de masse m soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle terrestre. En outre, le centre O de la Terre est supposé immobile et le satellite est repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. On se place dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$.
   a) Dans quelles circonstances est-il légitime de supposer que le centre de la Terre est immobile ?
   b) Montrer que $\vec{L}^O$, le vecteur moment cinétique de M en O, est conservé au cours de ce mouvement. En déduire que ce mouvement est nécessairement plan, et que ce plan passe par le centre O.

Il est plus judicieux de travailler en coordonnées polaires qu'en coordonnées sphériques. On choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées polaires, qui est illustré sur la figure (1), avec $r = OM$.

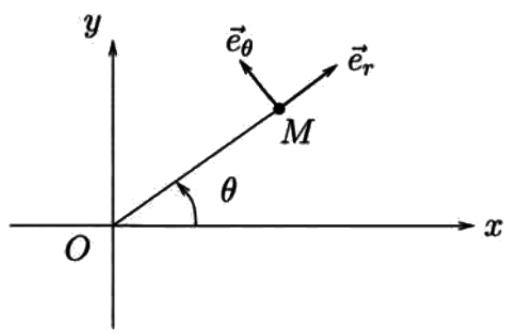

FIGURE 1 – Coordonnées polaires.

c) Montrer que le satellite est un système conservatif et établir l'expression de son énergie potentielle $E_p(r)$.

d) En déduire qu'il peut être assimilé à un système conservatif à un seul degré de liberté r d'énergie potentielle effective $E_{p_{\text{eff}}}(r)$. Donner l'expression de $E_{p_{\text{eff}}}$ en fonction de r, de la norme L de $\overrightarrow{L}^O$ et d'autres constantes utiles.

e) Tracer l'allure de $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ et discuter les états possibles du satellite en fonction de l'énergie mécanique E_m. Indiquer le type de trajectoire associé à chaque état (sans démonstration).

f) Dans le cas où le satellite est en orbite autour de la Terre, la trajectoire est fermée. Déterminer alors la distance minimale r_{min} et la distance maximale r_{max} du satellite au centre de la Terre en fonction de E_m en particulier.

g) On lance le satellite depuis la surface de la Terre avec une vitesse de norme v_0 faisant un angle α avec la verticale. Donner les expressions de L et de E_m correspondantes.

h) En déduire l'expression de l'excentricité e de la trajectoire en fonction de v_0, v_ℓ et α. On rappelle que le paramètre de la trajectoire vérifie

$$p = \frac{L^2}{\mathcal{G}m^2 M_T}\,.$$

i) Déterminer une condition impliquant en particulier les grandeurs α et v_0 pour que l'objet ne s'écrase pas sur la surface de la Terre.

II. Mesure de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$

C'est dans le but de "peser" la Terre que Cavendish, physicien britannique du $18^{\text{ième}}$ siècle, a mesuré pour la première fois la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$. Il en déduisit une mesure de la densité moyenne de la Terre d'une telle précision que cette mesure a servi de référence pendant plus d'un siècle. La mesure de $\mathcal{G}$ permet en effet de déterminer la masse de la Terre M_T si on connaît en particulier son rayon R_T.

1. Cavendish a utilisé un pendule de torsion pour mesurer la faible attraction gravitationnelle entre des sphères métalliques. Pour quelles raisons, n'a-t-il pas simplement utilisé un ressort afin de déterminer l'interaction gravitationnelle (et donc $\mathcal{G}$) par la mesure de son allongement ?

2. Le pendule de torsion est schématiquement représenté et décrit sur la figure (2). On suppose qu'en l'absence des boules de masse M, la position d'équilibre du pendule est fixée à $\theta = 0$. Lorsque le pendule est écarté d'un angle θ, le fil de torsion produit un moment de rappel $M_r = -C\theta$ (par rapport à l'axe du fil de torsion) où C est la constante de torsion du fil.

   a) Donner la dimension de C.

   b) On montre alors que le mouvement de l'angle θ est déterminé par l'équation suivante :

   $$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \;+\; \lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \;+\; C\theta \;=\; 0 \qquad (1)$$

   où I et λ sont des constantes positives dont on donnera la dimension. Interpréter physiquement les trois termes de cette équation.

   c) Sous quelle condition satisfaite par les constantes I, λ et C le pendule oscille-t-il ? Dans ce cas, donner l'expression de la "pseudo-période" T ainsi que l'expression du temps caractéristique τ du régime transitoire en fonction de I, λ et C. Donner l'allure du graphe $\theta(t)$ dans le cas où le pendule oscille. On précisera en particulier la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \to \infty$.

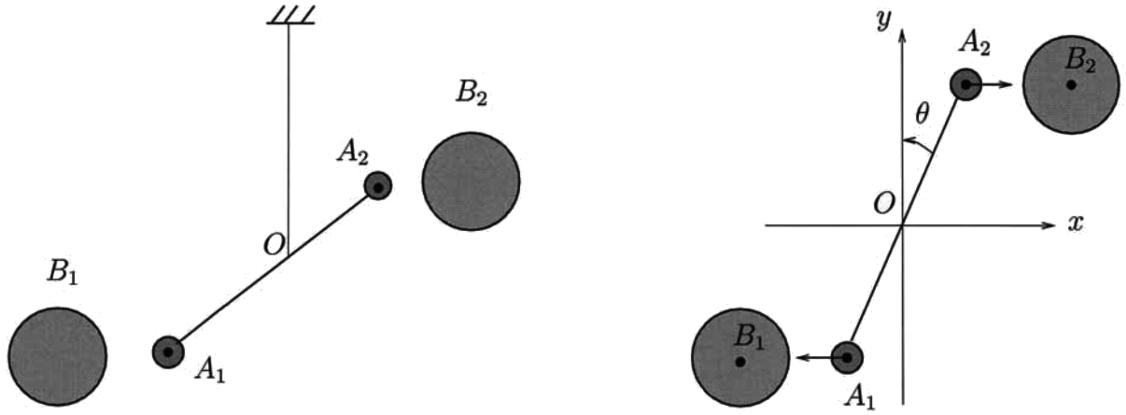

FIGURE 2 – Le pendule de torsion est constitué d'un fil métallique fixé à une extrémité et attaché par son autre extrémité au milieu O d'une barre rigide au bout de laquelle sont placées deux boules identiques de centres A_1 et A_2 et de masse m. La position du pendule est repérée par l'angle θ représenté sur le schéma. En plaçant deux autres boules identiques de masse M et de centres B_1 et B_2 à proximité de celles du pendule, on crée un moment de forces dû à la gravitation qui déplace la position d'équilibre du pendule. La mesure de cette nouvelle position d'équilibre permet de déterminer $\mathcal{G}$. On propose à gauche une vision en perspective et à droite une vision de dessus du pendule.

3. Maintenant, on approche les boules identiques de masse M du pendule. Ces boules exercent une force de gravitation sur les boules de masse m qui produit un moment de force supplémentaire $M_g(\theta)$ (par rapport à l'axe du fil de torsion) qui dépend a priori de θ.
   a) Comment est modifiée l'équation du mouvement (1) ? Déterminer alors l'équation satisfaite par la nouvelle position d'équilibre θ_e du pendule en fonction de C et de M_g.
   b) Pour simplifier le problème, les paramètres du dispositif sont choisis de manière à ce que $M_g(\theta)$ varie très peu en fonction de θ. On peut donc faire l'approximation $M_g(\theta) \simeq M_g(0)$ et on notera M_g sa valeur (sans faire référence à l'angle θ). Le moment des forces $M_g = M_{g1} + M_{g2}$ a deux contributions : une première contribution M_{g1} due aux actions des boules de centres B_1 et B_2 respectivement sur celles de centres A_1 et A_2 ; une seconde contribution M_{g2} due aux actions des boules de centres B_1 et B_2 respectivement sur celles de centres A_2 et A_1. On négligera l'action des boules de masse M sur la barre rigide du pendule.
   Etablir les expressions de M_{g_1} et M_{g_2} lorsque $\theta = 0$ en fonction de la distance $R = A_1B_1 = A_2B_2$ et de la longueur $2d = A_1A_2$ de la barre rigide. On supposera pour cela que les boules de masse m sont "ponctuelles". En déduire l'expression du moment total des forces gravitationnelles.
   c) Connaissant la valeur de $\mathcal{G}$ donnée dans le formulaire, évaluer la valeur d'équilibre θ_e sachant que $m = 15$ g, $M = 1,5$ kg, $d = 5$ cm, $R = 4,5$ cm et $C = 0,6 \times 10^{-8}$ N.m. Cette valeur de θ_e est-elle mesurable ?
4. Aujourd'hui, on peut mesurer θ_e avec une plus grande précision. Pour cela, on colle au centre de la barre rigide un miroir plan sur lequel on envoie un rayon laser. En l'absence des boules de masse M, le rayon laser arrive sur le miroir en incidence normale et est réfléchi dans la direction incidente. En présence des boules, le miroir est incliné d'un angle θ_e et le laser n'y arrive plus en incidence normale, il est donc réfléchi dans une direction différente de celle du rayon incident. Le dispositif est représenté dans la figure (3).
   a) Exprimer la valeur de l'angle α que forment le rayon incident et le rayon réfléchi en fonction de θ_e.
   b) On place un écran à une distance L du miroir de sorte à observer le rayon réfléchi comme indiqué sur le schéma (3). On observe alors sur cet écran un point lumineux qui se trouve à une distance e du laser. Quel est l'ordre de grandeur de L pour que la distance e soit de l'ordre du centimètre ? Commenter.

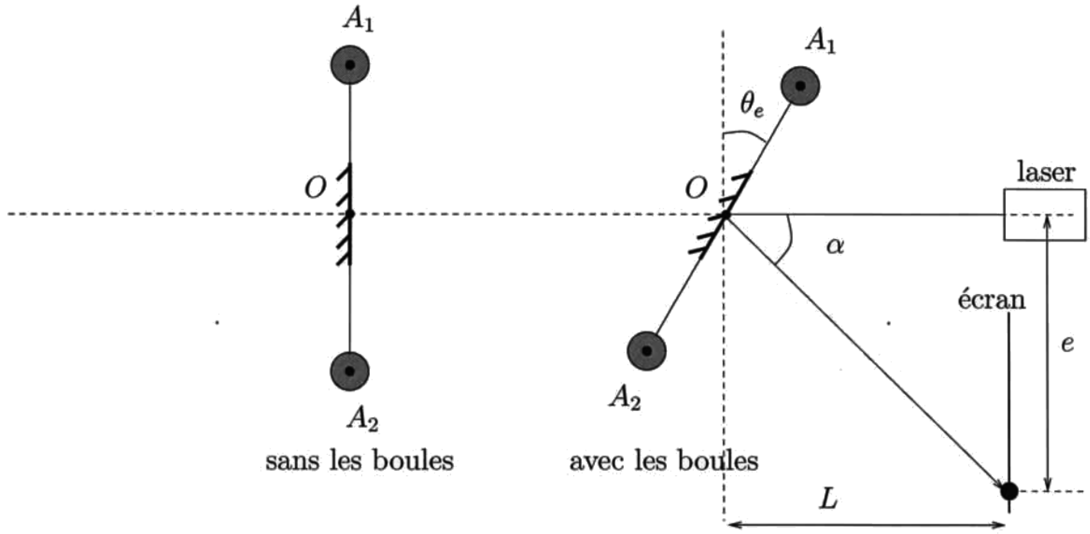

FIGURE 3 – La mesure de l'angle α permet d'accéder à la valeur de la constante de Newton $\mathcal{G}$.

III. Temps d'effondrement d'une étoile sous l'effet de la gravitation

La gravitation est au cœur de la formation et de l'évolution des étoiles. En son temps, Newton avait déjà émis l'hypothèse que l'auto-gravitation était responsable de la formation des étoiles dans le sens où, dans un amas de “particules”, celles-ci peuvent s'attirer entre elles du fait de l'interaction gravitationnelle pour former ensuite éventuellement une étoile. Mais cette interaction ne permet pas de comprendre à elle seule toutes les propriétés stellaires et il est même remarquable de constater que toutes les interactions ont leur rôle à jouer dans les étoiles.

On suppose dans cette partie que l'étoile est isolée dans l'Univers et qu'elle est constituée d'un gaz de particules de masse totale M_s. Cette étoile est supposée être une distribution à symétrie sphérique de centre O et de rayon R_s : on lui associe un système de coordonnées sphériques. Les particules constituant l'étoile ne sont sujettes qu'à l'attraction gravitationnelle exercée les unes sur les autres.

1. A l'instant initial, $t = 0$, le rayon de l'étoile est R_s. Par un argument physique, décrire le seul état d'équilibre possible pour une étoile de particules soumises seulement à l'attraction gravitationnelle.
2. NEW QUESTION ! Par des arguments dimensionnels, proposer une expression pour le temps d'effondrement de l'étoile sur elle-même t_{eff}.
3. On considère dans cette étoile une particule M qui se trouve constamment “au bord” de l'étoile lors de son évolution. En supposant que la particule n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle de la part de l'étoile et qu'elle n'a pas de vitesse initiale, justifier que cette particule a une trajectoire rectiligne.
4. Montrer que la norme v de la vitesse de la particule au bord de l'étoile est donnée par la relation :
$$v^2 = 2\mathcal{G}M_s\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right), \tag{2}$$
où r représente le rayon de l'étoile à l'instant t. Cette expression est-elle réaliste ? pourquoi ?
5. En déduire l'expression du temps d'effondrement de l'étoile t_{eff}. On utilisera le résultat suivant :
$$A = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
6. Si on suppose que l'étoile a initialement une masse volumique uniforme ρ, exprimer le temps d'effondrement en fonction de ρ. Commenter le résultat obtenu.
7. Estimer le temps d'effondrement t_{eff} pour une étoile qui a les caractéristiques du Soleil données dans le formulaire. Comparer t_{eff} avec le temps de vie du Soleil. Commenter la différence.