

# MECANIQUE

*Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.*

## CALCULATRICES AUTORISÉES

**DOCUMENT AUTORISÉ : Texte « Accéléromètre et Sismomètre » NON ANNOTÉ**

### I. Vibrations d'une molécule HCl

La molécule diatomique HCl est modélisée, selon un axe fixe, par deux masses ponctuelles distantes de  $r$ . Puisque l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène, il peut être considéré comme fixe. Seul le noyau d'hydrogène de masse  $m$  est alors susceptible de se déplacer. Il subit l'énergie potentielle d'interaction :

$$E_p(r) = \frac{C}{r^n} - \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où  $C$ ,  $\alpha$  et  $n$  sont des constantes positives ( $n$  est un entier). En l'absence de tout champ extérieur, la distance d'équilibre inter-atomique est  $r_0$ . L'énergie minimale à fournir pour dissocier cette molécule sera notée  $E_d$ .

1. Retrouver la dimension de la constante  $\epsilon_0$ ? En déduire une unité SI possible.
2. Interpréter les deux termes de l'énergie potentielle et représenter l'allure de  $E_p(r)$ . On précisera graphiquement la position  $r_0$  et l'énergie  $E_d$  en les justifiant.
3. Calculer  $r_0$  en fonction des constantes du problème. Puis exprimer la pulsation  $\omega_0$  des petites oscillations de la molécule, ainsi que l'énergie de dissociation  $E_d$ , en fonction de  $n$ ,  $C$  et  $r_0$ .
4. Des mesures spectroscopiques permettant d'accéder expérimentalement à  $r_0$ ,  $\omega_0$  et  $E_d$ . Exprimer la constante  $n$  en fonction de  $r_0$ ,  $\omega_0$ ,  $E_d$  et des constantes nécessaires, puis faire l'application numérique (cf ci-dessous).

En déduire les expressions de  $C$ , et  $\alpha$  en fonction notamment de  $n$ ,  $r_0$ , et  $E_d$ , puis faire les applications numériques. Commenter la valeur de  $\alpha$ .

*Données :*  $m = 1,66 \times 10^{-27}$  kg ;  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C ;  $r_0 = 1,27 \times 10^{-10}$  m ;  $\omega_0 = 5,45 \times 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup> ;  $E_d = 400$  kJ.mol<sup>-1</sup> ;  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$  (SI) et  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ .

On souhaite maintenant étudier les oscillations de la molécule (ou de l'atome d'hydrogène) forcées par une onde électromagnétique. L'objectif est de déterminer l'amplitude minimale du champ électrique de l'onde nécessaire pour rompre la molécule. Ainsi, on considère l'action d'un champ électrique sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $E_0$ , polarisé selon la direction  $\vec{u}_x$  :

$$\vec{E}(t) = E(t) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad E(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

La molécule étant fortement polarisée, l'atome d'hydrogène porte une charge partielle positive de l'ordre de  $e$ , alors que le chlore porte une charge de l'ordre de  $-e$ . En présence du champ  $\vec{E}$ , la molécule s'oriente dans sa direction, donc selon  $\vec{u}_x$ . D'autre part nous admettons alors que l'hydrogène peut être quasiment assimilé à un proton, et que la force qu'il subit est

$$\vec{F}(t) = \beta e \vec{E}(t),$$

où  $\beta$  est de l'ordre de l'unité :  $\beta \sim 1$ .

En oscillant au voisinage de sa position d'équilibre, le proton rayonne de l'énergie électromagnétique, et donc perd de son énergie mécanique. Pour des mouvements de faible amplitude, on modélise cela par l'existence d'une force de frottement fluide agissant sur le proton. En considérant des petites oscillations

au voisinage de  $r_0$ , le proton se comporte donc comme un oscillateur amorti de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur de qualité  $Q$ . On suppose que le référentiel de travail, dans lequel l'atome de chlore est fixe, est galiléen. En notant  $x(t)$  l'écart de la position du proton par rapport à sa position d'équilibre (selon  $\vec{u}_x$ ), l'équation différentielle du mouvement issue du principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{u}_x$  s'écrit donc

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + \beta eE(t) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\beta e}{m} E(t)}.$$

5. On mesure que le temps de réponse caractéristique du proton est de l'ordre de  $\tau = 2 \times 10^{-9}$  s. Calculer le facteur de qualité  $Q$  de cet oscillateur. Commenter.
6. On s'intéresse maintenant au régime sinusoïdal forcé par le champ  $\vec{E}(t)$ , qu'on notera  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ . En définissant une notation complexe  $\underline{x}(t)$  associée à  $x(t)$  qu'on explicitera, calculer l'amplitude du mouvement  $X_m$  en fonction de la pulsation réduite  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ , et des constantes nécessaires.
7. D'après les valeurs numériques trouvées, montrer qu'il peut exister une résonance en élongation pour cet oscillateur. Etablir l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$ . On en donnera un résultat approché tenant compte de la valeur de  $Q$ .
8. A quelle fréquence est-il judicieux d'exciter la molécule si l'on souhaite rompre la liaison ? A quelle longueur d'onde cela correspond-il ? On justifiera en établissant l'expression de l'amplitude des oscillations du proton pour cette fréquence, et en comparant au cas statique.
9. Pour avoir une idée de la précision requise pour le choix de cette fréquence, on calcule la bande passante  $\Delta f = f_2 - f_1$  où  $f_1$  et  $f_2$  (avec  $f_1 < f_2$ ) sont les fréquences de coupure de la molécule oscillante considérée comme un filtre mécanique. Calculer  $\Delta f$  en fonction de la fréquence propre  $f_0$  et du facteur de qualité  $Q$ , puis sa valeur numérique. A quelle largeur  $\Delta \lambda$  cela correspond-il pour les longueurs d'ondes ?  
*Conseil : Pour simplifier les calculs, on pourra conserver uniquement les termes d'ordre le plus bas non nul en  $\frac{1}{Q}$ . On rappelle aussi que  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  si  $\varepsilon \ll 1$ .*
10. Montrer qu'à la pulsation propre  $\omega_0$ , l'énergie mécanique du proton est constante. Exprimer sa valeur en fonction de l'amplitude de son mouvement  $X_m$ , de  $\omega_0$ ,  $m$  et de  $E_d$ .
11. En déduire que pour briser la molécule, il faut atteindre une amplitude d'oscillations  $X_m$  vérifiant :

$$E_d = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2.$$

Comparer alors  $X_m$  à  $r_0$ .

12. En déduire l'ordre de grandeur de l'amplitude  $E_0$  du champ électrique nécessaire pour briser la molécule, en supposant que l'on se place exactement à la fréquence optimale déterminée précédemment.
13. Que dire de la validité du modèle linéaire dans ces conditions ? Quelles sont les conséquences sur le choix de la longueur d'onde excitatrice ?

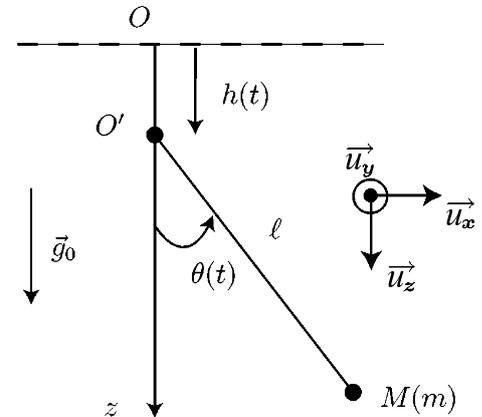
## II. Instabilité paramétrique du Botafumeiro

Le grand encensoir de Saint-Jacques de Compostelle (Botafumeiro) est un gros encensoir accroché à une corde de longueur variable, via un système de poulie. En tirant sur la corde puis en la relâchant de façon périodique, on peut générer un mouvement pendulaire de plus en plus intense, à condition d'opérer de façon synchronisée. Ce problème propose de modéliser ce phénomène d'instabilité d'un pendule forcé.

Le grand encensoir est donc assimilé à un pendule simple constitué d'un fil de longueur  $\ell$  constante, de masse nulle et sans raideur, et d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à son extrémité (figure ci-contre). Le point de suspension  $O'$  de ce pendule suit un mouvement de translation forcé sinusoidalement à la pulsation  $\omega_e$ . Par rapport au repère fixe, dont l'origine  $O$  est solidaire du plafond de la cathédrale, le mouvement de translation du point de suspension  $O'$  s'écrit :

$$\overrightarrow{OO'}(t) = h(t) \vec{u}_z = h_0 \cos(\omega_e t) \vec{u}_z$$

avec  $0 < h_0 \ll \ell$ . On repère la position de l'encensoir par rapport à la verticale par l'angle  $\theta(t)$ . On note  $\mathcal{R}$  le référentiel terrestre, supposé galiléen. On néglige les frottements.



### 1. Equation du mouvement

- Définir la base polaire associée à l'angle  $\theta$ , et la représenter sur un schéma. En décomposant le vecteur position selon  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ , et en utilisant cette base polaire, établir l'expression de l'accélération de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
- Faire le bilan des forces appliquées au point matériel  $M$ , de masse  $m$ , et les représenter sur le schéma. Projeter ces forces sur la base cylindrique ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_y$ ).
- En déduire l'équation du mouvement vérifiée par la variable  $\theta(t)$ . Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + 2f \cos(\omega_e t)) \sin \theta = 0.$$

On donnera l'expression des constantes  $\omega_0$  et  $f$  en fonction des données du problème.

Dans la suite, on se limitera au cas où  $f \ll 1$ .

On observe que l'amplitude des oscillations s'accroît lorsque le système est excité à une pulsation proche de  $\omega_e = 2\omega_0$ . Dans la suite, on étudie la naissance de cette instabilité dite *paramétrique*.

### 2. Etude énergétique

- Calculer la norme  $T$  de la force de tension du fil, en fonction notamment de  $\theta(t)$  et  $h(t)$  et/ou de leurs dérivées (temporelles). Cette force peut-elle être conservative? Pour quelle raison? Qu'en serait-il si l'on faisait cesser le forçage en imposant  $h(t) = 0$ ?
- On note  $E_m$  l'énergie mécanique du point matériel  $M$  dans  $\mathcal{R}$ . En appliquant le théorème de la puissance mécanique dans  $\mathcal{R}$  au système  $M(m)$ , montrer que le dispositif exciteur peut soit apporter de l'énergie au système soit lui en prendre, selon la phase du mouvement du point  $O'$ . On précisera dans quelle phase l'énergie augmente et inversement. Pour ce faire, on pourra supposer que le mouvement est d'amplitude modérée de sorte que  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$  (début de l'instabilité).
- En déduire que si on impose  $\omega_e = 2\omega_0$ , et qu'on synchronise le forçage de façon à tirer sur la corde (faire monter  $O'$ ) lorsque  $\theta \approx 0$  et donner du mou (faire descendre  $O'$ ) lorsque  $\theta \approx \pm\theta_{\max}$  (au voisinage des positions extrêmes), alors en moyenne sur une période de balancier on parvient à fournir de l'énergie au système. On rappelle que comme  $h_0 \ll \ell$ , on a  $g \gg h_0 \omega_e^2$ .
- Expliquer pourquoi, à l'aide d'un graphique, si l'énergie mécanique augmente (lentement) alors l'amplitude du mouvement augmente elle aussi.
- Calculer l'énergie mécanique  $E_m$  du point matériel  $M$  en fonction notamment de  $\theta(t)$  et  $h(t)$  et/ou de leurs dérivées temporelles. On distinguera son énergie cinétique  $E_c$  et son énergie potentielle  $E_p$ .

### 3. Equation de Mathieu - Diagramme de stabilité

Désormais, le but est donc de retrouver non pas qualitativement mais rigoureusement à quelle condition sur les paramètres de l'excitation (amplitude  $h_0$  et pulsation  $\omega_e$ ), on parvient à déstabiliser l'oscillateur. Puisque l'on étudie la naissance de l'instabilité, il est légitime de faire l'approximation des mouvements de faible amplitude. On obtient alors l'équation de Mathieu :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + 2f \cos(\omega_e t)) \theta = 0.$$

La théorie mathématique de Floquet montre que l'on peut chercher la solution générale de l'équation de Mathieu sous la forme d'une **combinaison linéaire de deux fonctions** du type<sup>1</sup> :

$$\theta(t) = e^{\mu\omega_0 t} P(t)$$

où  $P(t)$  est une fonction de période  $T = 2\pi/(\omega_e/2) = 4\pi/\omega_e$ , et  $\mu$  une constante réelle ou complexe. L'approche la plus élémentaire consiste à chercher des solutions sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 e^{\mu\omega_0 t} \cos\left(\frac{\omega_e}{2} t + \phi\right) \text{ où } \phi \text{ est une constante.}$$

Pour simplifier l'écriture, on note désormais  $\omega = \omega_e/2$  et  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

9. En négligeant les termes de pulsation  $3\omega$  qui apparaîtront dans le calcul, montrer que  $\cos \phi$  et  $\sin \phi$  vérifient alors nécessairement le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (\mu^2 + 1 + f - \Omega^2) \cos \phi - 2\mu\Omega \sin \phi = 0 \\ -2\mu\Omega \cos \phi + (-\mu^2 - 1 + f + \Omega^2) \sin \phi = 0 \end{cases}$$

Comme la solution triviale  $\cos \phi = \sin \phi = 0$  n'existe pas, ce système est de déterminant nul, ce qui se traduit par l'équation suivante vérifiée par  $\mu$  et  $\Omega$  :

$$(\mu^2 + 1 + f - \Omega^2)(-\mu^2 - 1 + f + \Omega^2) - 4\mu^2\Omega^2 = 0$$

Après développement et remise en forme, on obtient la forme simplifiée<sup>2</sup>

$$\mu^4 + 2(\Omega^2 + 1)\mu^2 + (\Omega^2 - 1)^2 - f^2 = 0$$

10. En cherchant les solutions de cette équation, montrer que l'instabilité paramétrique prend naissance dès lors que le paramètre d'excitation  $f$  vérifie la condition

$$f^2 > (1 - \Omega^2)^2 = f_c^2$$

11. Etablir alors le diagramme de stabilité de l'encensoir dans le plan  $(f, \Omega)$  ( $f$  en ordonnée). Indiquer les zones de stabilité et d'instabilité.
12. Commenter l'influence de l'amplitude de l'excitation à la résonance (c'est-à-dire en  $\omega_e = 2\omega_0$ ) ainsi qu'en dehors de la résonance.

1. On généralise ici la méthode de recherche des solutions des équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants, où l'on obtenait une *équation caractéristique*.

2. Cette équation joue le rôle d'équation caractéristique pour la constante  $\mu$ .

### III. Accéléromètre et sismomètre

Les questions qui suivent reposent sur l'étude du document intitulé « Accéléromètre et Sismomètre » distribué la semaine dernière, ainsi que sur vos connaissances personnelles. On s'attachera à répondre de façon concise, mais aussi autant que possible avec précision.

#### 1. Accéléromètre ADXL330

Après consultation de la documentation du composant, répondre aux questions suivantes :

1. Le composant ADXL330 mesure-t-il l'accélération suivant un seul axe ou selon les trois coordonnées d'espace ?

Dessiner la puce en perspective en indiquant ses dimensions et les axes correspondants.

2. a) Expliquer simplement le fonctionnement du bloc micro-électromécanique dénommé « 3-axis sensor ».

On rappelle que la capacité d'un condensateur plan à vide dont les armatures sont de surface  $S$  et distantes de  $e$  est  $C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ .

- b) Quel est le rôle du bloc noté DEMOD dans la documentation ?

3. a) On s'intéresse par exemple à la composante de l'accélération selon  $Ox$ , notée  $a_x$ . Donner la forme théorique sous forme canonique de la fonction de transfert reliant, en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , l'accélération complexe  $\underline{a}_x$  à la tension de sortie du capteur  $\underline{u}_{X_{out}}$  en l'absence de condensateur  $C_x$ . Donner le nom ou la signification des constantes introduites.

- b) D'après la documentation et vos connaissances sur les accéléromètres, que peut-on dire de la valeur du facteur de qualité du ADXL330 ? Quelles sont les bandes passantes indiquées sur la notice constructeur ? Proposer un graphe rendant compte de la réponse fréquentielle du capteur.

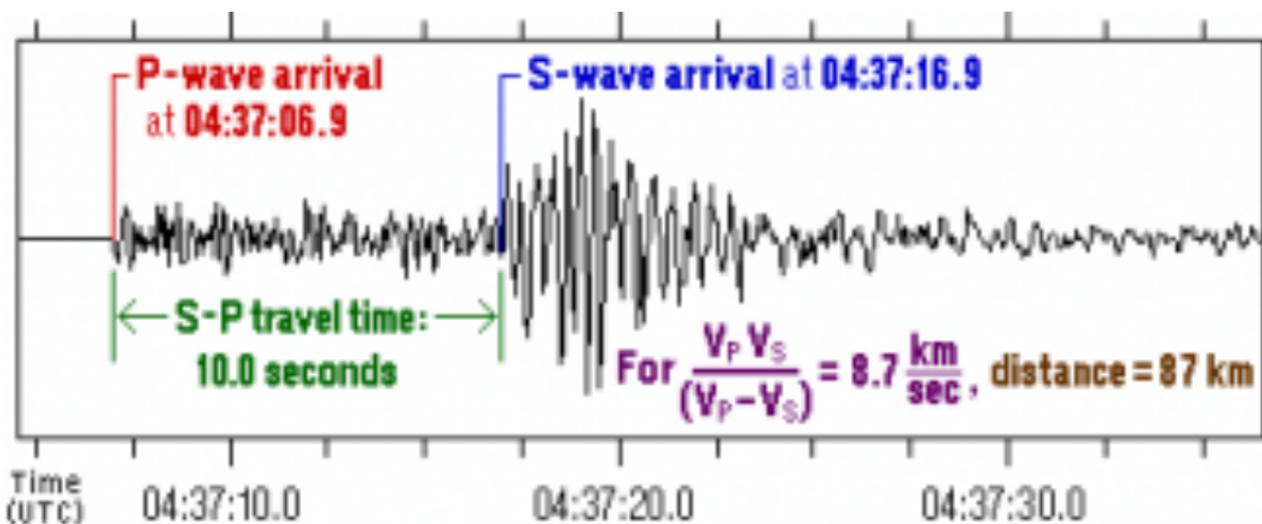
- c) L'utilisateur peut-il diminuer ou augmenter ces bandes passantes ? Comment ? Dans quel but ?

- d) Qu'arrive-t-il aux signaux dont la fréquence est située en dehors de cette bande passante ?

- e) Quel ordre de grandeur en terme de fréquence d'excitation un utilisateur de jeu vidéo peut-il atteindre ? Les caractéristiques du capteur sont-elles compatibles avec cette valeur ? Si oui que faut-il choisir comme capacités de sortie ? Pourquoi la bande passante doit-elle être supérieure à la fréquence maximale d'utilisation ?

#### 2. Application à la sismologie

On présente ci-dessous un exemple de sismogramme possible :



4. Retrouver (démontrer) la formule donnant la distance entre le foyer du séisme et le sismomètre.

5.
  - a) Evaluer la fréquence fondamentale du signal reçu. Les caractéristiques du composant permettent-elles de détecter ce signal correctement ?
  - b) D'après la documentation, indiquer les sources d'incertitude associées à l'utilisation du AXDL330 et les grandeurs sur lesquelles portent ces incertitudes. Evaluer une incertitude portant sur la valeur de l'accélération selon une composante quelconque.
  - c) En déduire si l'on peut espérer détecter des tremblements de magnitude 3 ? de magnitude 4 ? Le capteur pourrait-il transmettre des données fiables pour un séisme important de magnitude 6 à 7 ?
  - d) Comment pourra-t-on distinguer les ondes de type P et de type S ?
6.
  - a) Pour l'axe (Ox), le capteur est monté sur une capacité de  $0,47 \mu\text{F}$ . Quelle est l'intervalle de valeurs possibles pour la bande passante, compte tenu de la variabilité de la résistance interne du composant ?
  - b) Pourquoi a-t-on fait ce choix d'une capacité de  $0,47 \mu\text{F}$  pour l'usage habituel du capteur sur un smartphone ?

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*