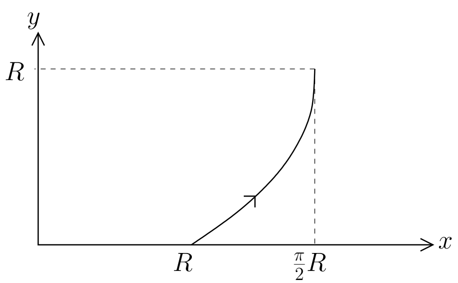
MÉCANIQUE

I. Mouvement d'une masse glissant sur un cylindre

1. On intègre deux fois l'accélération, qui est constante : $\boxed{\overrightarrow{OO'}(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2\,\vec{e}_x}$.
2. Par conservation de la longueur du fil (inextensible), on a $\overline{OO'} = R\theta$, d'où $\boxed{\theta = \frac{a_0}{2R}t^2}$.
3. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + R\,\vec{e}_r$, d'où $\boxed{x = R\theta + R\cos\theta}$ et $\boxed{y = R\sin\theta}$.
4. $x(\theta)$ et $y(\theta)$ sont des fonctions croissantes de θ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et $\theta(t)$ croît avec t de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Au départ, M a pour coordonnées $(x = R, y = 0)$. En $\theta = \frac{\pi}{2}$, M a pour coordonnées $(x = R\frac{\pi}{2}, y = R)$. La tangente à la courbe est donnée par le vecteur vitesse si celui-ci n'est pas nul. On l'obtient dans la base cartésienne en dérivant x et y par rapport au temps : $\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\,[(1-\sin\theta)\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y]}$. On obtient que en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_y$ donc **la tangente à la trajectoire est verticale**. En $\theta = 0$ la vitesse est nulle. Toutefois on peut connaître sa direction asymptotique en cherchant la limite de ses composantes : $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc **la tangente fait un angle de** $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'horizontale.
   Remarque : Ce dernier résultat peut s'obtenir aussi en cherchant la valeur de l'accélération en $\theta = 0$, puisque c'est alors l'accélération qui détermine la direction de la vitesse qui va apparaître.



5. On dénombre trois forces agissant sur M dans $\mathcal{R}$:
   — Force de pesanteur $\boxed{m\vec{g} = -mg\,(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)}$.
   — Force de réaction du cylindre (normale au support puisqu'on néglige tout frottement) : $\boxed{\overrightarrow{N} = N\,\vec{e}_r}$.
   — Force de tension du fil (tangente au fil au point d'accroche) : $\boxed{\overrightarrow{T} = T\,\vec{e}_\theta}$.
   Remarque : les deux dernières forces sont a priori inconnues. Elles seront déduites du PFD.
6. On a (faire un dessin) : $\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$.
   On redérive la vitesse dans la base cartésienne, ce qui mène à $\vec{a} = R\,[\ddot{\theta}(1-\sin\theta) - \dot{\theta}^2\cos\theta]\,\vec{e}_x + R\,[\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\sin\theta]\,\vec{e}_y$. Après passage dans la base polaire puis simplification, on obtient
   $$\boxed{\vec{a} = R\,(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + R\,\ddot{\theta}(1-\sin\theta)\,\vec{e}_\theta}.$$
   Comme $\theta = \frac{a_0}{2R}t^2$, on a $R\dot{\theta}^2 = 2a_0\theta$ et $R\ddot{\theta} = a_0$, d'où $\boxed{\vec{a} = a_0(\cos\theta - 2\theta)\,\vec{e}_r + a_0(1-\sin\theta)\,\vec{e}_\theta}$.
7. Le PFD s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$. En projection selon $\vec{e}_r$ puis selon $\vec{e}_\theta$, on obtient le système
   $$\begin{cases} ma_0(\cos\theta - 2\theta) &= -mg\sin\theta + N \\ ma_0(1-\sin\theta) &= -mg\cos\theta + T \end{cases}$$
   On en déduit $\boxed{N = ma_0(\cos\theta - 2\theta) + mg\sin\theta}$ et $\boxed{T = ma_0(1-\sin\theta) + mg\cos\theta}$.

8. Le mobile décolle si et seulement si la réaction N s'annule, donc si il existe une position $\theta_d \in]0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant
   $$\boxed{f(\theta_d) = \cos\theta_d - 2\theta_d + \frac{g}{a_0}\sin\theta_d = 0}$$
   On étudie rapidement la fonction $f(\theta)$. Sa dérivée $f'(\theta) = -\sin\theta + \frac{g}{a_0}\cos\theta - 2$ est décroissante, continue et vérifie $f'(\frac{\pi}{2}) = -3$. Donc $f'(\theta)$ est forcément négative au-delà d'un certain $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et positive avant. Donc $f(\theta)$ est forcément décroissante au-delà de θ_0 et croissante avant. Comme $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{g}{a_0} - \pi$, on en déduit que $f(\theta)$ s'annule si et seulement si $\frac{g}{a_0} - \pi < 0$. En conclusion, **le mobile ne décolle pas si et seulement si** $\boxed{a_0 \leq \frac{g}{\pi}}$. On remarque que l'accélération ne doit pas être trop forte, ce à quoi on pouvait s'attendre.

II. La toile de l'araignée (d'après Mines Ponts PC 2012)

1. Modélisation d'un fil élastique

1. Cf cours. Soient M_1 et M_2 les deux extrémités, la force exercée sur l'extrémité 2 s'écrit $\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}$, avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$. SCHEMA
2. La longueur à vide du ressort global est la somme de celle des ressorts : $\boxed{l_0 = \ell_{0\,1} + \ell_{0\,2}}$. En considérant la valeur algébrique de la force exercée sur l'extrémité droite de chaque ressort, on a $F_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{0\,1})$, $F_2 = -k_2(\ell_2 - \ell_{0\,2})$, et $F = -k(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{0\,1} - \ell_{0\,2})$. D'où $F/k = F_1/k_1 + F_2/k_2$. Or la tension du ressort 1 est égale à la tension du ressort 2, et donc à celle du ressort global : $F_1 = F_2 = F$. Donc après simplification on obtient $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$, d'où $\boxed{k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}}$. On vérifie facilement que $k < k_1$ et $k < k_2$, donc **le ressort global est plus souple** que chacun des deux ressorts 1 et 2.
3. Cette fois la force totale à l'extrémité droite est la somme des forces exercées par chaque ressort. Comme $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, on factorise par ℓ :
   $$F = F_1 + F_2 = -k_1(\ell - \ell_{0\,1}) - k_2(\ell - \ell_{0\,2}) = k\,(\ell - \ell_0) \quad \text{avec} \quad \boxed{k = k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\ell_0 = \frac{k_1\ell_{0\,1} + k_2\ell_{0\,2}}{k_1 + k_2}}.$$
   On constate que $k > k_1$ et $k > k_2$ donc **le ressort global est moins souple** que les ressorts 1 et 2.
4. On peut décomposer un fil élastique en fibres élastiques élémentaires parallèles juxtaposées côte-à-côte. La raideur globale est donc la somme des raideurs des fibres élémentaires (situation b). Donc la raideur globale est proportionnelle au nombre de fibres constituant la section totale du fil, donc à la section s.
   Par ailleurs, on peut aussi subdiviser le fil en petits morceaux élastiques mis bout-à-bout dans le sens de la longueur. Donc la souplesse globale est la somme des souplesses des morceaux (situation a), donc elle est proportionnelle à la longueur du fil ℓ_0. Ainsi, la raideur est inversement proportionnelle à ℓ_0.
   La constante E restante ne dépend nécessairement plus des caractéristiques géométriques du fil, donc elle ne dépend que du matériau.
5. On applique le théorème du centre d'inertie au système {hameçon + poids } à l'équilibre : $\vec{0} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{P}$. Par projections selon $\vec{e_x}$ d'une part et selon $\vec{e}_y$ d'autre part, on obtient le système suivant :
   $$\begin{cases} -F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 &= 0 \\ F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2 &= P \end{cases}$$
   En combinant ces deux équations (relations de Cramer... ?) on obtient
   $$\boxed{F_1 = \frac{\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\,P} \quad \text{et} \quad \boxed{F_2 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\,P}$$

6. Les relations du cosinus dans le triangle conduisent à $\boxed{\cos\alpha_1 = \dfrac{\ell_0^2+\ell_1^2-\ell_2^2}{2\ell_0\ell_1}}$ et $\boxed{\cos\alpha_2 = \dfrac{\ell_0^2+\ell_2^2-\ell_1^2}{2\ell_0\ell_2}}$.

7. Sachant que les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 sont mesurées, et les forces F_1 et F_2 en sont déduites, il reste à écrire la loi de Hooke pour déterminer la raideur des fils $k_i = \frac{Es}{\ell_{0\,i}} = 1/(x\ell_{0\,i})$ avec $i = 1, 2$, pour en déduire x. On a donc $F_1 = (\ell_1 - \ell_{0\,1})/(x\ell_{0\,1}) = (\ell_1/\ell_{0\,1} - 1)/x$ et $F_2 = (\ell_2/\ell_{0\,2} - 1)/x$. Les longueurs $\ell_{0\,1}$ et $\ell_{0\,2}$ n'étant pas données, on doit utiliser le fait que $\ell_0 = \ell_{0\,1} + \ell_{0\,2}$ pour contraindre x. Ceci conduit à $\ell_0 = \ell_1/(1+F_1x) + \ell_2/(1+F_2x)$. Après réarrangement on obtient le trinôme proposé avec les constantes indiquées.

8. On choisit pour x l'unique solution positive : $\boxed{x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, que l'on inverse pour trouver Es (dans la même unité que les forces). En suivant les instructions de l'énoncé, on obtient :
$$\boxed{\alpha_1 = 25,6° \quad , \quad \alpha_2 = 15,8° \quad , \quad F_1 = 3,98\,\text{mN} \quad , \quad F_2 = 3,73\,\text{mN} \quad \text{et} \quad Es = 58,6\,\text{mN}}.$$

9. $[E] = [k].[\ell_0]/[s] = [F_1]/[\ell_0].L^{-1} = M.L.T^{-2}.L^{-2}$, d'où $\boxed{[E] = M.L^{-1}.T^{-2}}$. Il s'agit de la dimension d'une force par unité de surface, donc d'une pression. On peut donc choisir l'unité **Pascal (Pa)**.

   On commence par évaluer la moyenne arithmétique de Es : $\overline{Es} \approx 56,1\,\text{mN}$. Ceci conduit à $\boxed{E = \dfrac{Es}{\pi r_0^2}} \approx \underline{714\,\text{MPa}}$.
   Puis on construit une incertitude-type de type A (de niveau de confiance 68%), en évaluant l'écart-type de Es : $\Delta_A(Es) = \sigma_5(Es) = 8,5\,\text{mN}$. Par différenciation logarithmique, on a $\frac{\mathrm{d}E}{E} = \frac{\mathrm{d}(Es)}{Es} - 2\frac{\mathrm{d}r_0}{r_0}$, d'où en passant aux incertitudes :
$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(Es)}{Es}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r_0}{r_0}\right)^2}} \approx \underline{18\,\%}\,,$$
   en prenant $\Delta r_0 = 0,25\,\mu\text{m}$. Ceci conduit à une incertitude de $\Delta E \approx 1.10^2\,\text{MPa}$. Compte tenu de l'incertitude, le résultat obtenu s'écrit finalement $\boxed{E = 7.10^2 \pm 1\,\text{MPa}}$.
   Remarque : pour information, cette valeur est de l'ordre de 5 fois plus faible que pour un fil de Nylon.

2. Oscillations de la toile complète

10. La transformation géométrique qui permet de passer de la toile en forme de cône à la toile plane au repos est une projection orthogonale sur le plan horizontal. Les fils circulaires formant des cercles horizontaux sur le cône, **ils sont de même taille** que leur image. Leur longueur est donc toujours $\boxed{l_c = l_{0\,c} = 2\pi r_p}$.

    Par contre, les fils radiaux sont étirés, et vérifient $\boxed{l_r = \dfrac{R}{\sin\alpha}}$.

11. On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) à l'insecte dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il subit sont poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, et la force de chaque fil radial. Par symétrie les N fils exercent tous la même force en norme, dont la projection verticale vaut $\frac{Es}{\ell_{0\,r}}(\ell_r - \ell_{0\,r})\cos\alpha = Es\,(\frac{\ell_r}{\ell_{0\,r}} - 1)\cos\alpha = Es\,(\frac{R}{R\sin\alpha} - 1)\cos\alpha$. En multipliant par N cette force, on obtient donc selon z :
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + g = \frac{NEs}{m}f(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \boxed{f(\alpha) = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)\cos\alpha}.$$

12. La position d'équilibre est obtenue pour $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0$, donc vérifie $\boxed{f(\alpha_0) = \dfrac{mg}{NEs}}$.
    Comme $h(\alpha_0) < 0$, le comportement est **stable** et l'équation approchée est celle d'un **oscillateur harmonique**, de pulsation $\sqrt{-\frac{g}{R}\,h(\alpha_0)}$. La période des oscillations est donc $\boxed{T = 2\pi\sqrt{-\dfrac{R}{g\,h(\alpha_0)}}} \approx \underline{0,60\,\text{s}}$.
    Cette période **dépend de la masse** de l'insecte via la valeur de α_0.